3 1761 07550047 0

Guichard, Claude
Sur les systémes

FOR USE IN
LIBRARY
ONLY

QA
691
G85

Handle with
EXTREME CARE
This volume is damaged or brittle
and CANNOT be repaired!
• photocopy *only if necessary*
• return to staff
• *do not* put in bookdrop
Gerstein Science Information Centre

Scientia

C. Guichard

Sur les Systèmes triplement indéterminés et sur les Systèmes triple-orthogonaux

N° 25

GAUTHIER-VILLARS, Éditeur

SCIENTIA
Juin 1905.

PHYS.-MATHÉMATIQUE
n° 25.

SUR LES

SYSTÈMES TRIPLEMENT INDÉTERMINÉS

ET SUR LES

SYSTÈMES TRIPLE-ORTHOGONAUX

PAR

C. GUICHARD,
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND.

SEEN BY
PRESERVATION
SERVICES
DATE AUG 1969

LIBRARY
OCT 24 1966
UNIVERSITY OF TORONTO

1135011

QA
691
G85

SUR LES

SYSTÈMES TRIPLEMENT INDÉTERMINÉS

ET SUR LES

SYSTÈMES TRIPLE-ORTHOGONAUX.

INTRODUCTION.

Je me propose, dans ce Mémoire, de montrer comment les nouvelles méthodes que j'ai introduites autrefois dans la Géométrie à deux indéterminées peuvent s'appliquer aux systèmes triplement indéterminés.

Dans la Géométrie à deux indéterminées les éléments essentiels étaient les *réseaux* et les *congruences :* ici il y a lieu de faire intervenir trois éléments que j'appelle les *systèmes points,* les *systèmes plans* et les *systèmes droites.*

Il était nécessaire d'abord d'indiquer, au moins d'une façon rapide, les propriétés essentielles de ces systèmes; et surtout de mettre en évidence la loi d'orthogonalité des éléments qui, comme je l'ai déjà dit ailleurs [*voir* mon Mémoire sur *Les Systèmes cycliques et les Systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École normale,* 1897, 1898 et 1903)], joue dans la Géométrie infinitésimale un rôle aussi important que la loi de dualité dans la Géométrie algébrique.

Cette étude générale des systèmes fait l'objet des quatre premiers Chapitres de ce travail. Je me suis borné aux propriétés essentielles; j'ai dû, pour ne pas trop allonger ce travail, passer sous silence un certain nombre de propriétés qui ont leur importance mais qui ne sont pas absolument nécessaires pour donner une idée d'ensemble de la question.

Mais le but essentiel de ce Livre est l'étude des systèmes triple-orthogonaux dans les espaces d'ordre quelconque. Il importe de faire une théorie générale de ces systèmes et de montrer quels sont les divers systèmes (points, plans ou

droites) qui s'y rattachent. C'est l'objet des Chapitres V et VI.

Il était utile ensuite d'étudier certains cas particuliers; je suis arrivé ainsi à indiquer toute une série de problèmes qui permettent de former de nouveaux systèmes triple-orthogonaux; et, en outre, je montre les diverses transformations que comporte chaque problème.

Enfin, comme il est matériellement impossible de traiter complètement tous les problèmes posés, mais comme d'autre part il importe de ne pas se contenter de vagues généralités, j'ai étudié, comme type, deux problèmes :

1° Ce que j'appelle les *systèmes* O, 4O *dans l'espace à trois dimensions;* ce sont des systèmes triple-orthogonaux qui se correspondent de telle sorte qu'entre les fonctions de Lamé, h_1, h_2, h_3 de l'un et les fonctions h'_1, h'_2, h'_3 de l'autre, existent les relations

$$h'_1 = h_1 U_1, \qquad h'_2 = h_2 U_2, \qquad h'_3 = h_3 U_3,$$

U_1, U_2, U_3 étant respectivement des fonctions de u_1, u_2, u_3 seuls.

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1903), j'ai déjà traité le cas où les fonctions U_1, U_2, U_3 se réduisent toutes à des constantes.

2° Ce que j'appelle *les systèmes* O *de l'espace à trois dimensions applicables sur un système de l'espace à six dimensions.* Je ramène le problème à la recherche des *systèmes opposés* dans l'espace à trois dimensions, c'est-à-dire à la recherche des systèmes triple-orthogonaux qui se correspondent de telle sorte que les β_{ik} (de M. Darboux) de l'un soient égaux aux β_{ki} de l'autre.

J'ai indiqué les principales propriétés de ces systèmes dans une Communication que j'ai faite au Congrès d'Heidelberg.

Ces systèmes comprennent, comme cas particulier, des systèmes qui ont été signalés, d'une façon très brève, par Ribeaucour dans son Mémoire *Sur les surfaces courbes* (*Journal de Mathématiques*, 1892).

Enfin, parmi les systèmes de Ribeaucour, se trouvent les systèmes triple-orthogonaux qui sont engendrés par la translation d'une surface. Ces systèmes ont été étudiés par MM. Lucien Lévy et Petot.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES POINTS, SYSTÈMES DROITES, SYSTÈMES PLANS.

1. Systèmes points. — Soient x^1, x^2, ..., x^n les coordonnées d'un point M dans l'espace à n dimensions; supposons que ces coordonnées soient des fonctions de trois variables u_1, u_2, u_3; nous dirons que le point M décrit un *système point* lorsque, l'une quelconque des variables restant fixe, le système doublement indéterminé décrit par le point M est un réseau. [*Voir* mon Mémoire *Sur les systèmes cycliques et sur les systèmes orthogonaux* (*Annales de l'Ecole Normale*, 1897, 1898 et 1902)]. Il en résulte que les fonctions x^1, x^2, ..., x^n sont solutions communes à trois équations aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_2\,\partial u_3} = P_1 \frac{\partial x}{\partial u_2} + Q_1 \frac{\partial x}{\partial u_3},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_3\,\partial u_1} = P_2 \frac{\partial x}{\partial u_3} + Q_2 \frac{\partial x}{\partial u_1},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\,\partial u_2} = P_3 \frac{\partial x}{\partial u_1} + Q_3 \frac{\partial x}{\partial u_2},$$

où les quantités P et Q sont des fonctions de u_1, u_2, u_3.

2. Paramètres normaux. — Soient MT_1, MT_2, MT_3 les tangentes aux courbes décrites par le point M quand chacune des variables u_1 ou u_2 ou u_3 varie seule. Désignons par ξ_1^1, ξ_1^2, ..., ξ_1^n les paramètres directeurs de MT_1; par ξ_2^1, ξ_2^2, ..., ξ_2^n ceux de MT_2; enfin par ξ_3^1, ξ_3^1, ..., ξ_3^n ceux de MT_3. Si u_3 reste fixe, le point M décrit un réseau ayant pour tangentes MT_1, MT_2; il en résulte que $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial u_2}$ est une fonction linéaire et homogène de ξ_1^i et ξ_2^i; de sorte que l'on a, quel que soit l'indice i,

$$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial u_2} = p_{12}\,\xi_2^i + q_{12}\,\xi_1^i.$$

On obtient d'autres relations analogues en considérant les

autres réseaux décrits par M; de sorte que l'on arrive à des relations de la forme suivante :

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u_2} = p_{12}\xi_2 + q_{12}\xi_1, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u_3} = p_{23}\xi_3 + q_{23}\xi_2, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u_1} = p_{31}\xi_1 + q_{31}\xi_3, \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u_3} = p_{13}\xi_3 + q_{13}\xi_1, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u_1} = p_{21}\xi_1 + q_{21}\xi_2, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u_2} = p_{32}\xi_2 + q_{32}\xi_3. \end{cases}$$

(Dans les deux membres de chaque équation A, il faut mettre le même indice supérieur; cet indice, qui est l'un quelconque des nombres 1, 2, ..., n, a été supprimé pour simplifier l'écriture.)

En écrivant que les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 \xi_1}{\partial u_2 \partial u_3}$ déduites des équations A sont identiques, on obtient des relations parmi lesquelles je signale la suivante :

$$\frac{\partial q_{12}}{\partial u_3} = \frac{\partial q_{13}}{\partial u_2}.$$

On en déduit facilement que l'on peut multiplier tous les paramètres ξ_1 par un même facteur λ de façon à faire disparaître, dans les équations A, les termes q_{12} et q_{13}; λ est déterminé, à un facteur près, qui est une fonction de u_1 seul. On voit, de même, que l'on peut multiplier tous les paramètres ξ_2 par un même facteur de façon à faire disparaître les coefficients q_{23}, q_{21}; enfin, en multipliant les paramètres ξ_3 par un facteur convenablement choisi, on pourra faire disparaître les coefficients q_{31} et q_{32}.

Les paramètres ainsi déterminés sont les *paramètres normaux* des tangentes au système point M. Les paramètres normaux ξ_1 sont déterminés à un facteur près U_1, fonction de u_1 seul; de même ξ_2 et ξ_3 sont déterminés respectivement à un facteur près, fonction de u_2 pour les ξ_2 et fonction de u_3 pour les ξ_1. Dorénavant, nous introduirons toujours les paramètres normaux.

Avec ces paramètres, on a les formules suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u_2} = \beta_{12}\xi_2, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u_3} = \beta_{23}\xi_3, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u_1} = \beta_{31}\xi_1, \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u_3} = \beta_{13}\xi_3, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u_1} = \beta_{21}\xi_1, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u_2} = \beta_{32}\xi_2. \end{cases}$$

Ces formules sont de la forme

$$(1)\quad \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\xi_k.$$

En écrivant que les équations (1) sont compatibles, on trouve que les quantités β_{ik} doivent satisfaire aux équations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13}\beta_{32}, & \dfrac{\partial\beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\beta_{13}, & \dfrac{\partial\beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\beta_{21}, \\ \dfrac{\partial\beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12}\beta_{23}, & \dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23}\beta_{31}, & \dfrac{\partial\beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31}\beta_{12}, \end{cases}$$

formules qui rentrent dans le type

$$(2)\quad \frac{\partial\beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk}.$$

Les fonctions ξ_1 satisfont aux trois équations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi_1}{\partial u_1\,\partial u_2} = \dfrac{1}{\beta_{12}}\dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial u_2} + \beta_{12}\beta_{21}\xi_1, \\ \dfrac{\partial^2\xi_1}{\partial u_1\,\partial u_3} = \dfrac{1}{\beta_{13}}\dfrac{\partial\beta_{13}}{\partial u_1}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial u_3} + \beta_{13}\beta_{31}\xi_1, \\ \dfrac{\partial^2\xi_1}{\partial u_2\,\partial u_3} = \dfrac{1}{\beta_{12}}\dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial u_3}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial u_2} + \dfrac{1}{\beta_{13}}\dfrac{\partial\beta_{13}}{\partial u_2}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial u_3}. \end{cases}$$

La première de ces équations admet comme solution β_{13}, la deuxième β_{12}. On formerait de même les équations qui ont pour solutions ξ_2 ou ξ_3. (*Voir* DARBOUX, *Leçons*, IVe Partie.)

3. Détermination du système point. — Soient toujours $x^1, x^2, \ldots, x^n$ les coordonnées du point M que décrit le système; les quantités $\dfrac{\partial x^i}{\partial u_1}$ sont proportionnelles aux quantités ξ_1^i paramètres de MT_1. On voit, de même, que les $\dfrac{\partial x^i}{\partial u_2}$ et les $\dfrac{\partial x^i}{\partial u_3}$ sont respectivement proportionnels aux ξ_2^i et aux ξ_3^i. On aura donc (en supprimant toujours les indices supérieurs pour simplifier l'écriture)

$$(4)\quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = h_1\xi_1, \qquad \frac{\partial x}{\partial u_2} = h_2\xi_2, \qquad \frac{\partial x}{\partial u_3} = h_3\xi_3.$$

Écrivant que les équations (4) sont compatibles, on trouvera, en tenant compte des formules (1),

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial u_2} = \beta_{21}h_2, & \dfrac{\partial h_2}{\partial u_3} = \beta_{31}h_3, & \dfrac{\partial h_3}{\partial u_1} = \beta_{13}h_1, \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial u_3} = \beta_{31}h_3, & \dfrac{\partial h_2}{\partial u_1} = \beta_{21}h_1, & \dfrac{\partial h_3}{\partial u_2} = \beta_{23}h_2. \end{cases}$$

formules qui rentrent dans le type

$$(5)\qquad \frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} h_k.$$

Des formules (4), on déduit facilement que $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sont solutions du système

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u_3}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_3},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_3} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\frac{\partial x}{\partial u_1},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (5) permettent de calculer les quantités β_{ik} à l'aide de h_1, h_2, h_3; si l'on porte ces valeurs des β_{ik} dans les équations (2), on trouvera seulement trois équations distinctes pour h_1, h_2, h_3. Ce sont les équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_1}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u_3}\frac{\partial h_1}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_3},\\ \frac{\partial^2 h_2}{\partial u_3\,\partial u_1} &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial u_1}\frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial u_3}\frac{\partial h_2}{\partial u_1},\\ \frac{\partial^2 h_3}{\partial u_1\,\partial u_2} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial u_2}\frac{\partial h_3}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u_1}\frac{\partial h_3}{\partial u_2}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (7) sont celles qui expriment que le système (6) admet des solutions qui dépendent de trois fonctions arbitraires d'une variable. On obtient ces équations (7) en exprimant que la première des équations (6) admet la solution h_1, la seconde la solution h_2, la troisième la solution h_3.

4. Systèmes points parallèles. — Deux systèmes points sont parallèles lorsque les tangentes correspondantes sont parallèles. Pour deux systèmes points parallèles, les $3n$ quantités ξ_k^i sont les mêmes; il en résulte que les six fonctions β_{ik} sont aussi les mêmes; mais les fonctions h_1, h_2, h_3 ne sont pas les mêmes.

5. Systèmes plans. Systèmes droites. — Un système *droite* est formé par l'une quelconque des tangentes à un système point. Ainsi la droite M_1T_1 (n° 2) décrit un système droite; si l'une des variables u_1, u_2, u_3 reste fixe, la droite MT_1

décrit une congruence ; si deux de ces variables restent fixes, la droite reste tangente à une courbe.

Les paramètres $\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^n$ de MT_1 satisfont aux équations (3); en multipliant ces paramètres par un même facteur, on arrive au résultat suivant :

Les paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'une droite qui décrit un système satisfont aux trois équations

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_3} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}\frac{\partial X}{\partial u_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial X}{\partial u_3} + R_1 X, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_3 \partial u_1} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\frac{\partial X}{\partial u_3} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\frac{\partial X}{\partial u_1} + R_2 X, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\frac{\partial X}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\frac{\partial X}{\partial u_2} + R_3 X. \end{aligned}\right.$$

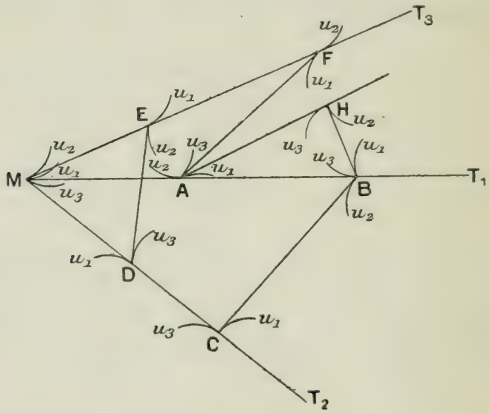
Un système *plan* est le système décrit par le plan formé par deux tangentes d'un système point. Ainsi le plan $T_1 M T_2$ (n° 2) décrit un système plan.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS FOCALES.

6. Propriétés des tangentes à un système point. — Soient M un système point, MT_1 la tangente à la courbe décrite par M quand u_1 varie seul. Par définition, quand la variable u_1 variera seule, MT_1 enveloppe une courbe; nous

Fig. 1.



allons démontrer qu'il en est de même pour les variables u_2 et u_3.

En effet, soit A $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ un point de la droite MT_1; ses coordonnées sont de la forme

$$y^i = x^i + \rho\xi_1^i \tag{1}$$

ou, en supprimant l'indice supérieur, pour simplifier l'écriture, comme nous le ferons toujours dorénavant.

$$y = x + \rho\xi_1. \tag{1}$$

Différentions la formule (1) par rapport à u_2, on trouve, en tenant compte des formules du Chapitre I,

$$\frac{\partial y}{\partial u_2} = \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial u_2} + \xi_2 (h_2 + \rho \beta_{12}).$$

On voit que, si l'on détermine ρ par l'équation

$$h_2 + \rho \beta_{12} = 0, \tag{2}$$

le point A décrira, quand u_2 varie seul, une courbe tangente à MT_1; on voit de même qu'il existe sur MT_1 un point B qui, lorsque u_3 varie seul, décrit une courbe tangente à MT_1.

Nous désignerons de même par C et D les points où MT_2 touche son enveloppe quand u_3 ou u_1 respectivement varient seuls; enfin par E et F les points où MT_3 touche une enveloppe quand u_1 ou u_2 respectivement varient seuls (*fig.* 1).

Nous allons démontrer que tous les points A, B, C, D, E, F décrivent des systèmes points.

7. Transformation de Laplace. — Considérons, en particulier, le point A; cherchons les paramètres des tangentes aux courbes décrites par A quand chacune des variables u_1, u_2, u_3 varie seule. Pour la variable u_2 ces paramètres sont proportionnels aux quantités ξ_1; pour avoir les autres paramètres, différentions l'équation (1) par rapport à u_1 et à u_3; on trouve, en tenant compte des formules du Chapitre I,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u_1} &= \xi_1 \left(h_1 + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \right) + \rho \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1}, \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_3} &= \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial u_3} + \xi_3 (h_3 + \rho \beta_{13}). \end{aligned} \right. \tag{3}$$

D'autre part, l'équation (2) donne, en différentiant par rapport à u_1 et à u_3,

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{12} \left(h_1 + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \right) + \rho \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} &= 0, \\ \beta_{32} (h_3 + \rho \beta_{13}) + \beta_{12} \frac{\partial \rho}{\partial u_3} &= 0. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

En tenant compte des formules (3) et (4), on voit que les paramètres directeurs des tangentes aux courbes décrites par A sont proportionnels, lorsque u_1 varie seul, aux quan-

tités

$$(5)\qquad \xi_1 \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} - \beta_{12} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1}$$

et, lorsque u_3 varie seul, aux quantités

$$(6)\qquad \beta_{12}\xi_3 - \beta_{32}\xi_1.$$

Pour vérifier que le point A décrit un système, il suffit de montrer qu'on peut multiplier chacune des séries de paramètres directeurs que nous venons d'obtenir par un facteur convenable de façon à avoir des paramètres normaux (2). On trouve facilement ces multiplicateurs et l'on voit qu'on peut prendre comme paramètres normaux

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi'_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} - \frac{1}{\beta_{12}} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} \xi_1, \\ \xi'_2 &= \frac{1}{\beta_{12}} \xi_2, \\ \xi'_3 &= \xi_3 - \frac{\beta_{32}}{\beta_{12}} \xi_1. \end{aligned}\right.$$

Ces nouveaux paramètres satisfont aux équations

$$\frac{\partial \xi'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik}\xi_k$$

où les β'_{ik} ont les valeurs suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \beta'_{12} &= \beta_{12}\left(\beta_{12}\beta_{21} - \frac{\partial^2 \log \beta_{12}}{\partial u_1\, \partial u_2}\right), \\ \beta'_{13} &= \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} - \beta_{13} \frac{\partial \log \beta_{12}}{\partial u_1}, \\ \beta'_{21} &= \frac{1}{\beta_{12}}, \\ \beta'_{23} &= \frac{\beta_{13}}{\beta_{12}}, \\ \beta'_{31} &= -\frac{\beta_{32}}{\beta_{12}}, \\ \beta'_{32} &= -\beta_{12} \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\beta_{32}}{\beta_{12}}\right). \end{aligned}\right.$$

On aura ensuite

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = h'_1 \xi'_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u_2} = h'_2 \xi'_2, \qquad \frac{\partial y}{\partial u_3} = h'_3 \xi'_3,$$

où les quantités h'_1, h'_2, h'_3 ont les valeurs suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} h'_1 = \rho = -\dfrac{1}{\beta_{12}}\, h_2 = -\dfrac{h_2}{h_1}\dfrac{\partial h_2}{\partial u_1}, \\[2ex] h'_2 = \beta_{12}\dfrac{\partial \rho}{\partial u_2} = -\beta_{12}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{h_2}{\beta_{12}}\right) = -\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial h_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{h_2}{h_1}\dfrac{\partial h_2}{\partial u_1}\right), \\[2ex] h'_3 = h_3 + \rho\beta_{13} = h_3 - \dfrac{\beta_{13}}{\beta_{12}}\, h_2 = h_3 - h_2\,\dfrac{\dfrac{\partial h_3}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial h_2}{\partial u_1}}. \end{cases}$$

Avec ces valeurs des quantités h', on pourra former les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les quantités y. Ces équations sont les analogues des équations (6) du Chapitre I.

Le passage du système point M, à l'un quelconque des systèmes points A, B, C, D, E, F constitue une transformation que, par analogie avec ce qui se passe dans le cas de deux indéterminées, M. Darboux a appelée une *transformation de Laplace*. (*Leçons,* IVe Partie, Chapitre XII.)

Pour distinguer ces diverses transformations nous dirons que le passage de M à A, par exemple, est une transformation de Laplace faite de u_1 vers u_2.

8. Propriété de la transformation de Laplace. — Nous avons vu que les coordonnées du point A sont

$$y = x - \frac{h_2}{\beta_{12}}\,\xi_1,$$

on verrait de même que celles du point F sont

$$z = x - \frac{h_2}{\beta_{32}}\,\xi_3$$

et, par conséquent, les paramètres directeurs AF sont proportionnels aux quantités $y - z$ ou encore aux quantités

$$\beta_{32}\xi_1 - \beta_{12}\xi_3.$$

Il s'ensuit que, (n° 7), la droite AF est la tangente à la courbe décrite par A quand u_3 varie seul; on voit de même que cette droite est tangente à la courbe décrite par F quand u_1 varie seul.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Si l'on fait trois transformations de Laplace en allant :

1° *de* u_1 *vers* u_2; 2° *de* u_3 *vers* u_1; 3° *de* u_2 *vers* u_3, *on retombe sur le système primitif* (DARBOUX, *Leçons, loc. cit.*).

Il est bien évident que le théorème subsiste si l'on place les variables u_1, u_2, u_3 dans un ordre quelconque. On en déduit que la droite BC (*fig.* 1) est tangente à la courbe décrite par B quand u_2 varie seul et à la courbe décrite par C quand u_1 varie seul; de même, la droite ED est tangente à la courbe décrite par E quand u_2 varie seul et à la courbe décrite par D quand u_3 varie seul.

Enfin les tangentes en A et B quand u_1 varie seul se coupent en un point H (*fig.* 1) qui décrit un système point.

9. Éléments focaux d'un système point. — Par définition, les tangentes d'un système point décrivent des systèmes droites; ces systèmes droites sont appelés les *systèmes focaux* du système point. La tangente au système point quand u_k varie seul est la $k^{\text{ième}}$ droite focale du système. Ainsi MT_1, MT_2, MT_3 sont respectivement les première, deuxième, troisième droites focales du système M.

Par définition (n° 5) le plan formé par deux tangentes d'un système point décrit un système plan, qu'on appelle *système focal* du système point. Un système point a donc *trois plans focaux*: pour distinguer ces plans focaux, on leur donne un numéro d'ordre. Ainsi, s'il s'agit du système point M, les plans T_2MT_3, T_3MT_1, T_1MT_2 sont respectivement les premier, deuxième, troisième plans focaux de M.

10. Éléments focaux d'un système droite. — Considérons, par exemple, le système droite décrit par MT_1 (*fig.* 1). Nous savons que, si l'une des variables u_1, u_2, u_3 varie seule, la droite MT_1 enveloppe une courbe qu'elle touche respectivement en M, A, B. Ces points sont les *points focaux* de la droite; les systèmes décrits par ces points sont les *systèmes focaux* du système droite MT_1; M est le premier point focal, A le deuxième, B le troisième de la droite MT_1.

De même les plans ABH, MBC, MAF qui passent par MT_1 décrivent des systèmes plans qu'on appelle les *systèmes focaux* de MT_1; ABH est le premier *plan focal* de MT_1, MBC le deuxième; MAF le troisième.

11. Éléments focaux d'un système plan. — Considérons, en particulier, le plan T_1MT_2, on voit facilement que si u_1 varie seul ce plan a une caractéristique (dans l'espace à trois

dimensions un plan a toujours une caractéristique, il n'en est pas de même dans les espaces d'ordre supérieur) qui est MC; de même quand u_2 ou u_3 varient seuls les caractéristiques du plan sont respectivement MB et BC; les caractéristiques décrivent des systèmes droites qui sont les *systèmes focaux* du plan T_1MT_2; MC est la première *droite focale* de ce plan, MB la deuxième et BC la troisième.

Si u_1 reste fixe le plan enveloppe un réseau, c'est le réseau décrit par B; de même si u_2 ou u_3 restent fixes le plan enveloppe le réseau C ou le réseau M. Ces points B, C, M sont les *points focaux* du plan; B est le premier point focal, C le second et M le troisième.

12. Loi de parallélisme des éléments. — Nous avons déjà défini (n° 4) ce qu'il faut entendre par système points parallèles. Nous dirons, de plus, que deux systèmes correspondants de droites sont *parallèles* lorsque les droites correspondantes qui les décrivent sont parallèles; on définirait de même les *systèmes plans parallèles*.

Il résulte facilement de tout ce qui précède le théorème suivant, qui forme la première partie de la loi de parallélisme des éléments : *si deux systèmes* (points, droite ou plan) *sont parallèles, les systèmes focaux correspondants sont parallèles.*

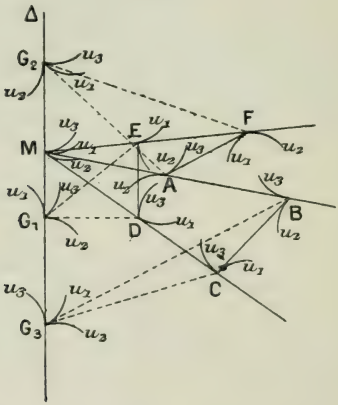
CHAPITRE III.

SYSTÈMES ASSEMBLÉS.

13. Systèmes points et droites assemblés. — Un système point M et un système droite Δ qui se correspondent sont dits *assemblés* lorsque le point M est situé sur la droite Δ qui lui correspond. Conservons pour le point M, les notations du Chapitre précédent, et désignons par G_1 le premier point focal de Δ, par G_2 le second, par G_3 le troisième (*fig.* 2).

La première droite focale de G_1 est naturellement Δ; d'après

Fig. 2.



ce qui a été établi pour les systèmes doublement indéterminés la seconde droite focale sera G_1D, la troisième G_1E; on voit de même que les droites focales de G_2 sont : G_1A, Δ et G_2F; celles de G_3 : G_2B, G_3C et Δ.

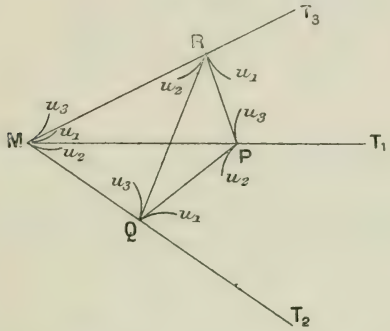
Les plans focaux de la droite Δ sont les plans ΔAB, ΔCD, ΔEF; ils contiennent les droites focales de M.

14. Systèmes points et plans assemblés. — Un système point et un système plan sont *assemblés* quand les foyers du

plan sont situés sur les droites focales de même rang du point. Ainsi le plan PQR (*fig.* 3) est assemblé au point M.

On sait que les coordonnées x du point M satisfont aux équations (6) du Chapitre I; si θ est une solution de ces

Fig. 3.



équations les coordonnées des points P, Q, R sont : pour le point P

$$x - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u_1}} \frac{\partial x}{\partial u_1},$$

pour le point Q

$$x - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u_2}} \frac{\partial x}{\partial u_2},$$

pour le point R

$$x - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u_3}} \frac{\partial x}{\partial u_3}$$

(Darboux, *Leçons*, IVe Partie, Chapitre XII).

On peut aussi remarquer que le point G_1 et le plan MDE (*fig.* 2) sont assemblés.

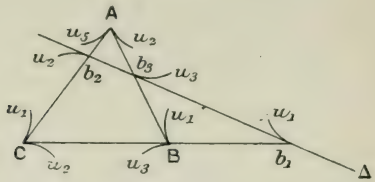
15. Systèmes droites et plans assemblés. — Une droite et un plan qui décrivent des systèmes correspondants sont dits *assemblés* lorsque la droite est située dans le plan qui lui correspond.

Ainsi le plan ABC et la droite Δ (*fig.* 4) décrivent des systèmes assemblés.

Les foyers G_1, G_2, G_3 de la droite Δ se trouvent sur les droites focales BC, CA, AB du plan.

On peut aussi remarquer que la droite MAB (*fig.* 2) est

Fig. 4.



assemblée au plan AG_2G_3B.

16. Propriétés focales des systèmes assemblés. — On démontre facilement les propriétés suivantes dont quelques-unes viennent déjà d'être signalées :

Si un point et une droite sont assemblés, toute droite focale du point est assemblée au plan focal de même rang de la droite; tout plan focal du point est assemblé au point focal de même rang de la droite.

Si un point et un plan sont assemblés, toute droite focale du point est assemblée au point focal de même rang du plan; tout plan focal du point est assemblé à la droite focale de même rang du plan.

Si une droite et un plan sont assemblés, tout point focal de la droite est assemblé à la droite focale de même rang du plan; tout plan focal de la droite est assemblé au point focal de même rang du plan.

17. Loi de parallélisme pour les éléments assemblés. — En suivant une marche analogue à celle que j'ai employée dans le cas de deux indéterminées [*voir* mon Mémoire *Sur les systèmes cycliques et orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 1897, 1898 et 1903)] on arrive au théorème suivant :

Si deux systèmes (point, plan ou droite) sont parallèles, tout système assemblé à l'un est parallèle à un système assemblé à l'autre.

Cette propriété constitue avec celle qui a été établie au n° **12** ce que j'appelle la *loi de parallélisme des éléments.*

CHAPITRE IV.

LOI D'ORTHOGONALITÉ DES ÉLÉMENTS.

18. Indications générales. — Il y a pour les systèmes triplement indéterminés une *loi des éléments orthogonaux* analogue à celle que j'ai exposée, dans le cas de deux indéterminées, dans mon Mémoire sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*Annales de l'École Normale*, 1903, Chap. II).

Dans les espaces d'ordre $3p$, cette loi fait correspondre à un système point, un système point; à un système droite, un système plan et inversement.

Dans les espaces d'ordre $3p+1$, elle fait correspondre à un système plan, un système plan; à un système droite, un système point et inversement.

Dans les espaces d'ordre $3p+2$, elle fait correspondre à un système droite, un système droite; à un système point, un système plan et inversement.

Dans les questions de cette nature n'intervient que la direction des éléments; de sorte que, si A et B sont deux systèmes orthogonaux, tout système parallèle à A est orthogonal à tout système parallèle à B.

19. Espaces d'ordre $3p$. — Considérons d'abord l'espace d'ordre 3; soit M un système point $\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3$; $\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3$; $\xi_3^1, \xi_3^2, \xi_3^3$ les paramètres normaux de ses tangentes MT_1, MT_2, MT_3. Nous pouvons déterminer à un facteur commun près trois fonctions $\xi_1'^1, \xi_1'^2, \xi_1'^3$ par les équations

$$\xi_1'^1 \xi_2^1 + \xi_1'^2 \xi_2^2 + \xi_1'^3 \xi_2^3 = 0, \qquad \xi_1'^1 \xi_3^1 + \xi_1'^2 \xi_3^2 + \xi_1'^3 \xi_3^3 = 0$$

que nous écrirons sous la forme abrégée :

$$(1) \qquad \Sigma \xi_1' \xi_2 = 0, \qquad \Sigma \xi_1' \xi_3 = 0.$$

Déterminons de même $\xi_2'^1$, $\xi_2'^2$, $\xi_2'^3$ par les équations

$$(2) \qquad \Sigma \xi_2' \xi_3 = 0, \qquad \Sigma \xi_2' \xi_1 = 0,$$

et enfin ξ'^1_3, ξ'^2_3, ξ'^3_3 par les équations

$$(3) \qquad \Sigma \xi'_3 \xi_1 = 0, \qquad \Sigma \xi'_3 \xi_2 = 0.$$

Nous allons démontrer que les quantités ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 sont les paramètres des tangentes d'un système point.

En effet, différentions la seconde des équations (1) par rapport à u_2, on aura, en tenant compte des formules du n° 2 et en ayant égard à la première des équations (1) :

$$\Sigma \xi_3 \frac{\partial \xi'_1}{\partial u_2} = 0,$$

et comme on a aussi

$$\Sigma \xi_3 \xi'_1 = 0, \qquad \Sigma \xi_3 \xi'_2 = 0,$$

on en déduit que les quantités $\frac{\partial \xi'_1}{\partial u_2}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de ξ'_1 et de ξ'_2 ; d'une manière générale on voit que les trois quantités $\frac{\partial \xi'_i}{\partial u_k}$ s'expriment en fonction linéaire et homogène des quantités ξ'_i et ξ'_k ; donc (n° 2), ces quantités ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 sont les paramètres des tangentes d'un système point. Soit alors M′ le point qui décrit ce système ; nous dirons que M et M′ sont des *systèmes points orthogonaux*. Les formules (1), (2), (3) contiennent d'une manière symétrique les quantités ξ et ξ', c'est-à-dire que les quantités ξ se déduisent des ξ', comme on a déduit ξ' de ξ.

Considérons un système droite D ; puis soient X_1, X_2, X_3 les paramètres directeurs de D ; puis un système plan P ; nous définirons ce système plan P par sa première droite focale Δ qui a pour paramètres directeurs Y_1, Y_2, Y_3 ; le plan contient alors la direction Δ et la direction qui a pour paramètres $\frac{\partial Y_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial Y_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial Y_3}{\partial u_1}$.

Cela posé, si le plan est donné, on détermine les quantités X par les équations

$$(4) \qquad \Sigma XY = 0, \qquad \Sigma X \frac{\partial Y}{\partial u_1} = 0.$$

Si au contraire le système droite est donné, on détermine les quantités Y par les équations

$$(5) \qquad \Sigma YX = 0, \qquad \Sigma Y \frac{\partial X}{\partial u_1} = 0$$

qui, comme on le voit facilement, sont des conséquences des

équations (4); on vérifie facilement que si les quantités X satisfont à des équations de la forme (8) (n° 5) il en est de même des quantités Y.

Considérons maintenant un espace d'ordre $n = 3p$; soit M un système point de cet espace, $\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^n$; $\xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^n$; $\xi_3^1, \xi_3^2, \ldots, \xi_3^n$ les paramètres normaux des tangentes MT_1, MT_2, MT_3 du système; nous déterminerons, à un facteur commun près, n fonctions $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ par les $(n-1)$ équations linéaires et homogènes

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Sigma\,\xi'_1\,\xi_2 = 0, & \Sigma\,\xi'_1\,\dfrac{\partial\xi_2}{\partial u_2} = 0, & \ldots, & \Sigma\,\xi'_1\,\dfrac{\partial^{p-1}\xi_2}{\partial u_2^{p-1}} = 0, \\ \Sigma\,\xi'_1\,\xi_3 = 0, & \Sigma\,\xi'_1\,\dfrac{\partial\xi_3}{\partial u_3} = 0, & \ldots, & \Sigma\,\xi'_1\,\dfrac{\partial^{p-1}\xi_3}{\partial u_3^{p-1}} = 0, \\ \Sigma\,\xi'_1\,\xi_1 = 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \Sigma\,\xi'_1\,\dfrac{\partial^{p-2}\xi_1}{\partial u_1^{p-2}} = 0. \end{array}\right.$$

On déterminerait de même $\xi'^1_2, \xi'^2_2, \ldots, \xi'^n_2$; puis $\xi'^1_3, \xi'^2_3, \ldots, \xi'^n_3$ par des équations analogues. Pour indiquer d'une façon plus nette le moyen de déterminer les fonctions $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ nous formerons les équations suivantes, qui sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{lll} \Sigma\,X\,\xi_1 = 0, & \ldots, & \Sigma\,X\,\dfrac{\partial^k\xi_1}{\partial u_1^k} = 0 \\ \Sigma\,X\,\xi_2 = 0, & \ldots, & \Sigma\,X\,\dfrac{\partial^k\xi_2}{\partial u_2^k} = 0 \\ \Sigma\,X\,\xi_3 = 0, & \ldots, & \Sigma\,X\,\dfrac{\partial^k\xi_3}{\partial u_3^k} = 0 \end{array}\right. \quad (k = 1, 2, \ldots, p-2);$$

$$(\beta)\qquad \Sigma\,X\,\frac{\partial^{p-1}\xi_1}{\partial u_1^{p-1}} = 0,$$

$$(\gamma)\qquad \Sigma\,X\,\frac{\partial^{p-1}\xi_2}{\partial u_2^{p-1}} = 0,$$

$$(\delta)\qquad \Sigma\,X\,\frac{\partial^{p-1}\xi_3}{\partial u_3^{p-1}} = 0.$$

Les quantités ξ'_1 satisfont à toutes ces équations, sauf l'équation (β); les quantités ξ'_2 à toutes sauf l'équation (γ) et les quantités ξ'_3 à toutes sauf l'équation (δ).

Il faut d'abord vérifier que les quantités ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 ainsi déterminées sont les paramètres directeurs des tangentes à un système point. Pour cela on vérifie, en tenant compte des équations (6), des équations (1) (n° 2) que les quantités

$\frac{\partial \xi'_1}{\partial u_2}$ satisfont aux équations (α) et (δ); par conséquent les $\frac{\partial \xi'_1}{\partial u_2}$ s'expriment en fonction linéaire et homogène des quantités ξ'_1 et ξ'_2; d'une manière générale $\frac{\partial \xi'_i}{\partial u_k}$ s'exprime en fonction linéaire et homogène de ξ'_i et de ξ'_k; donc (n° 2) les quantités ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 sont les paramètres directeurs des tangentes à un système point.

D'autre part, on déduit facilement des équations (6) et des équations analogues pour les quantités ξ'_2, ξ'_3 qu'il y a réciprocité entre les fonctions ξ et ξ', c'est-à-dire que les ξ peuvent se déduire des ξ', absolument comme nous avons déduit les ξ' des ξ.

Cela posé, soit M′ un système point dont les tangentes ont pour paramètres directeurs les quantités ξ'; nous dirons que M et M′ décrivent des *systèmes points orthogonaux*.

Considérons maintenant une droite D dont les paramètres sont $X_1, \ldots, X_n$ et un système plan P défini par sa première droite focale dont les paramètres directeurs sont $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Si le système droite D est donné, on détermine les Y par les $(n-1)$ équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Sigma Y X = 0, & \\ \Sigma Y \dfrac{\partial^k X}{\partial u_1^k} = 0 & (k = 1, 2, \ldots, p), \\ \Sigma Y \dfrac{\partial^h X}{\partial u_2^h} = 0 & \\ & (h = 1, 2, \ldots, p-1). \\ \Sigma Y \dfrac{\partial^h X}{\partial u_3^h} = 0 & \end{array}\right.$$

Si, au contraire, le système plan est donné, on détermine les X par les $(n-1)$ équations

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Sigma X Y = 0, & \\ \Sigma X \dfrac{\partial^k Y}{\partial u_1^k} = 0 & (k = 1, 2, \ldots, p), \\ \Sigma X \dfrac{\partial^h Y}{\partial u_2^h} = 0 & \\ & (h = 1, 2, \ldots, p-1), \\ \Sigma X \dfrac{\partial^h Y}{\partial u_3^h} = 0 & \end{array}\right.$$

qui, comme on le voit facilement, sont une conséquence des équations (7).

Dans ces conditions, nous dirons que le système droite D et le système plan P sont orthogonaux.

Les systèmes orthogonaux possèdent les propriétés suivantes, que, pour abréger, nous énonçons sans démonstration.

Si deux systèmes points sont orthogonaux, toute droite focale de l'un est orthogonale au plan focal de même rang de l'autre.

Tout système droite assemblé à l'un est orthogonal à un système plan assemblé à l'autre et inversement.

Si un système droite et un système plan sont orthogonaux :

Tout point focal de la droite est orthogonal au point focal de même rang du plan;

Tout plan focal de la droite est orthogonal à la droite focale de même rang du plan;

Tout système point assemblé à la droite est orthogonal à un système point assemblé au plan et inversement :

Tout système plan assemblé à la droite est orthogonal à un système droite assemblé au plan et inversement.

20. Espaces d'ordre $3p+1$. — Considérons, dans un espace d'ordre $n=3p+1$, un système point M dont les tangentes ont pour paramètres normaux $\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^n$, $\xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^n, \xi_3^1, \xi_3^2, \ldots, \xi_3^n$ et un système droite D, la droite D ayant pour paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Si le système M est donné, on déduit les X par les $(n-1)$ équations

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Sigma X \xi_1 = 0, & \Sigma X \dfrac{\partial^k \xi_1}{\partial u_1^k} = 0 \\ \Sigma X \xi_2 = 0, & \Sigma X \dfrac{\partial^k \xi_2}{\partial u_2^k} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, p-1). \\ \Sigma X \xi_3 = 0, & \Sigma X \dfrac{\partial^k \xi_3}{\partial u_3^k} = 0 \end{array}\right.$$

Au contraire, si le système droite D est donné, on détermine les ξ_1 par les $(n-1)$ équations

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} & \Sigma \xi_1 X = 0, \\ & \Sigma \xi_1 \dfrac{\partial^k X}{\partial u_1^k} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, p-1), \\ \Sigma \xi_1 \dfrac{\partial^h X}{\partial u_2^h} = 0, & \Sigma \xi_1 \dfrac{\partial^h X}{\partial u_3^h} = 0 \qquad (h=1, 2, \ldots, p); \end{array}\right.$$

les quantités ξ_2 et ξ_3 se déterminent par des équations ana-

logues. Toutes ces équations sont d'ailleurs une conséquence des équations (9) et des équations (1) du n° 2.

Dans ces conditions, le système point décrit par M et le système droite décrit par D sont dits *orthogonaux*.

Considérons maintenant un système plan P défini par sa première droite focale qui a pour paramètres $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et un second système plan Q dont la première droite focale a pour paramètres $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Si les X sont donnés, déterminons les Y par les $(n-1)$ équations

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lll} & \Sigma Y X = 0, & \\ & \Sigma Y \dfrac{\partial^k X}{\partial u_1^k} = 0 & (k = 1, 2, \ldots, p+1), \\ \Sigma Y \dfrac{\partial^h X}{\partial u_2^h} = 0, & \Sigma Y \dfrac{\partial^h X}{\partial u_3^h} = 0 & (h = 1, 2, \ldots, p-1). \end{array}\right.$$

Ces équations entraînent les suivantes :

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{lll} & \Sigma X Y = 0, & \\ & \Sigma X \dfrac{\partial^k X}{\partial u_1^k} = 0 & (k = 1, 2, \ldots, p+1), \\ \Sigma X \dfrac{\partial^h Y}{\partial u_2^h} = 0, & \Sigma X \dfrac{\partial^h Y}{\partial u_3^h} = 0 & (h = 1, 2, \ldots, p-1). \end{array}\right.$$

de sorte qu'il y a réciprocité entre les X et les Y. Dans ces conditions, nous dirons que les systèmes plans P et Q sont *orthogonaux*.

Ces systèmes possèdent les propriétés suivantes :

Si un système point et un système droite sont orthogonaux:

Toute droite focale du point est orthogonale au point focal de même rang de la droite;

Tout plan focal du point est orthogonal au plan focal de même rang de la droite;

Toute droite assemblée au point est orthogonale à un point assemblé à la droite et inversement;

Tout plan assemblé au point est orthogonal à un plan assemblé à la droite et inversement.

Si deux systèmes plans sont orthogonaux :

Tout point focal de l'un est orthogonal à la droite focale de même rang de l'autre;

Tout point assemblé à l'un est orthogonal à une droite assemblée à l'autre et inversement.

21. Espaces d'ordre $3p+2$. — Considérons, dans un espace d'ordre $n=3p+2$, deux systèmes droites : l'un décrit par la droite D qui a pour paramètres directeurs $X_1, \ldots, X_n$ et l'autre par la droite Δ qui a pour paramètres directeurs $Y_1, \ldots, Y_n$. Si le système D est donné, on déterminera les Y par les $n-1$ équations

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma YX = 0, \\ \Sigma Y \dfrac{\partial^k X}{\partial u_1^k} = 0, \quad \Sigma Y \dfrac{\partial^k X}{\partial u_2^k} = 0, \quad \Sigma Y \dfrac{\partial^k X}{\partial u_3^k} = 0 \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \end{array}\right.$$

Ces équations entraînent les suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma XY = 0, \\ \Sigma X \dfrac{\partial^k Y}{\partial u_1^k} = 0, \quad \Sigma X \dfrac{\partial^k Y}{\partial u_2^k} = 0, \quad \Sigma X \dfrac{\partial^k Y}{\partial u_3^k} = 0 \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \end{array}\right.$$

Il y a donc réciprocité entre les X et les Y. Dans ces conditions, nous dirons que les systèmes droites décrits par D et Δ sont *orthogonaux*.

Considérons maintenant un système point M dont les tangentes ont pour paramètres normaux $\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^n$, $\xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^n$, $\xi_3^1, \xi_3^2, \ldots, \xi_3^n$ et un système plan P défini par sa première droite qui a pour paramètres directeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Si le système M est donné, on détermine les X par les $(n-1)$ équations

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Sigma \xi_1 X = 0, & \Sigma \dfrac{\partial^k \xi_1}{\partial u_1^k} X = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \\ \Sigma \xi_2 X = 0, & \Sigma \dfrac{\partial^h \xi_2}{\partial u_2^h} X = 0 \\ & \qquad\qquad (h = 1, 2, \ldots, p-1). \\ \Sigma \xi_3 X = 0, & \Sigma \dfrac{\partial^h \xi_3}{\partial u_3^h} X = 0 \end{array}\right.$$

Si, au contraire, le système P est donné, on détermine les quantités $\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \xi_n^1$ par les $(n-1)$ équations

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma \xi_1 X = 0, \\ \Sigma \xi_1 \dfrac{\partial^k X}{\partial u_1^k} = 0, \quad \Sigma \xi_1 \dfrac{\partial^k X}{\partial u_2^k} = 0, \quad \Sigma \xi_1 \dfrac{\partial^k X}{\partial u_3^k} = 0 \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \end{array}\right.$$

Les quantités $\xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^n$ se déterminent par les

$(n-1)$ équations

$$(17)\quad \begin{cases} \Sigma \xi_2 X = 0, \\ \Sigma \xi_2 \dfrac{\partial^\alpha X}{\partial u_1^\alpha} = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, p+1), \\ \Sigma \xi_2 \dfrac{\partial^\beta X}{\partial u_2^\beta} = 0 & (\beta = 1, 2, \ldots, p-1), \\ \Sigma \xi_2 \dfrac{\partial^\gamma X}{\partial u_3^\gamma} = 0 & (\gamma = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Les quantités $\xi_3^1, \xi_3^2, \ldots, \xi_3^n$ se déterminent par des équations analogues aux équations (17); les équations (16), (17) sont d'ailleurs une conséquence des équations (15) et des équations (1) du n° 2.

Dans ces conditions, nous dirons que le point M et le plan P décrivent des *systèmes orthogonaux*.

Ces systèmes orthogonaux possèdent les propriétés suivantes :

Si deux systèmes droites sont orthogonaux :

Tout point focal de l'un est orthogonal au plan focal de même rang de l'autre;

Tout point assemblé à l'un est orthogonal à un plan assemblé à l'autre et inversement.

Si un système point et un système plan sont orthogonaux :

Toute droite focale du point est orthogonale à la droite focale de même rang du plan;

Tout plan focal du point est orthogonal au point focal de même rang du plan;

Toute droite assemblée au point est orthogonale à une droite assemblée au plan et inversement;

Tout plan assemblé au point est orthogonal à un point assemblé au plan et inversement.

CHAPITRE V.

SYSTÈMES POINTS O.

22. Systèmes points rectangulaires. Systèmes O. — Un système point est dit *rectangulaire*, si les tangentes MT_1, MT_2, MT_3 de ce système sont deux à deux perpendiculaires. On aura dans ce cas les équations

$$(1) \qquad \Sigma \xi_2 \xi_3 = 0, \qquad \Sigma \xi_3 \xi_1 = 0, \qquad \Sigma \xi_1 \xi_2 = 0.$$

Si l'on pose maintenant

$$(2) \qquad \theta_1 = \Sigma \xi_1^2, \qquad \theta_2 = \Sigma \xi_2^2, \qquad \theta_3 = \Sigma \xi_3^2,$$

on aura, en tenant compte des formules (1) du n° 2,

$$(3) \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial u_2} = 2 \beta_{12} \Sigma \xi_1 \xi_2 = 0, \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial u_3} = 2 \beta_{13} \Sigma \xi_1 \xi_3 = 0;$$

par conséquent θ_1 est une fonction de u_1 seul; on voit de même que θ_2 et θ_3 sont des fonctions respectives de u_2 et de u_3.

Les fonctions ξ_1 sont déterminées à un facteur près (n° 2) qui est une fonction de u_1; si donc θ_1 n'est pas nul, on pourra le réduire à l'unité; même conclusion pour θ_1 et θ_3.

Il en résulte que, si aucune des quantités θ_1, θ_2, θ_3 n'est nulle, on peut choisir les paramètres normaux ξ_1, ξ_2, ξ_3, de telle sorte qu'ils satisfassent aux équations (1) et aux équations

$$(4) \qquad \Sigma \xi_1^2 = 1, \qquad \Sigma \xi_2^2 = 1, \qquad \Sigma \xi_3^2 = 1.$$

Dans ce cas, le système point est appelé un *système* O.

On voit que les coordonnées x_1, x_2, ..., x_n du point M satisfont aux équations

$$(5) \qquad \frac{\partial x}{\partial u_1} = h_1 \xi_1, \qquad \frac{\partial x}{\partial u_2} = h_2 \xi_2, \qquad \frac{\partial x}{\partial u_3} = h_3 \xi_3.$$

On aura donc, en tenant compte des équations (1), (4)

et (5),

$$(6)\qquad ds^2 = \Sigma\, dx^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2,$$

c'est-à-dire que le point M décrit un système *triple-orthogonal.*

Dans le cas où une, ou plusieurs, des quantités θ_1, θ_2, θ_3 sont nulles, nous dirons que le système point est un *système rectangulaire singulier.*

23. Déterminants O. — Considérons un déterminant Δ à n^2 éléments qui sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à n dimensions :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Supposons que les éléments de ce déterminant soient des fonctions de trois variables u_1, u_2, u_3. On pourra exprimer les dérivées des éléments d'une même colonne, en fonction linéaire et homogène des éléments de cette colonne, les coefficients ne dépendant pas de la colonne ; on aura par conséquent des équations de la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_k^i}{\partial u_1} &= \sum_{l=1}^{l=n} p_{kl} x_l^i \\ \frac{\partial x_k^i}{\partial u_2} &= \sum_{l=1}^{l=n} q_{kl} x_l^i \\ \frac{\partial x_k^i}{\partial u_3} &= \sum_{l=1}^{l=n} r_{kl} x_l^i \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que l'on a

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_{kk} = 0, && q_{kk} = 0, && r_{kk} = 0, \\ &p_{kl} = -p_{lk}, && q_{kl} = -q_{lk}, && r_{kl} = -r_{lk}. \end{aligned}\right.$$

Ces quantités p_{kl}, q_{kl}, r_{kl} sont les rotations du déterminant Δ.

En formant de deux manières différentes les valeurs de

$\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u_1 \partial u_2}$, $\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u_2 \partial u_3}$, $\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u_3 \partial u_1}$, en se servant des équations (7), on obtient les relations qui doivent exister entre les rotations. Nous supposerons que ces relations sont satisfaites.

On peut alors se proposer de déterminer les éléments de Δ connaissant les rotations. Les éléments d'une même colonne sont solutions du système

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} &= \Sigma p_{kl} x_l, \\ \frac{\partial x_k}{\partial u_2} &= \Sigma q_{kl} x_l, \\ \frac{\partial x_k}{\partial u_3} &= \Sigma r_{kl} x_l, \end{aligned}\right.$$

qui est un système complet. On en déduit que la solution la plus générale se déduit d'une solution particulière, en effectuant sur les éléments du déterminant Δ une substitution orthogonale à coefficients constants.

Nous allons prendre une forme spéciale du déterminant Δ; nous modifierons d'abord la notation employée pour les éléments des trois dernières lignes; nous écrirons $\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^n$ au lieu de $x_{n-2}^1, x_{n-2}^2, \ldots, x_{n-2}^n$; puis $\xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^n$ au lieu de $x_{n-1}^1, x_{n-1}^2, \ldots, x_{n-1}^n$; enfin $\xi_3^1, \xi_3^2, \ldots, \xi_3^n$ au lieu de $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^n$; de sorte que le déterminant a la forme suivante :

$$(10)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ x_{n-3}^1 & x_{n-3}^2 & \ldots & x_{n-3}^n \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^n \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_2^n \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \ldots & \xi_3^n \end{vmatrix}.$$

Nous supposerons de plus que toutes les rotations p_{kl} sont nulles, sauf $p_{k,n-2}$ qui sera désigné par a_k si k est plus petit que $n-2$, par β_{21} pour $k=n-1$, par β_{31} pour $k=n$; de même toutes les rotations q_{kl} sont nulles, sauf si $l=n-1$; on désignera $q_{k,n-1}$ par b_k si k est plus petit que $n-2$, par β_{12} si $k=n-2$, par β_{32} si $k=n$; enfin toutes les rotations $r_{k,l}$ sont nulles, sauf les rotations r_{kn} qui seront désignées par c_k si k est plus petit que $n-2$, par β_{13} si $k=n-2$, par β_{23} si $k=n-1$.

Il résulte d'ailleurs de ce qui suit qu'il est possible de choisir ainsi les rotations.

On aura par conséquent les formules suivantes :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_k^i}{\partial u_1} &= a_k \xi_1^i \\ \frac{\partial x_k^i}{\partial u_2} &= b_k \xi_2^i \\ \frac{\partial x_k^i}{\partial u_3} &= c_k \xi_3^i \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, n-3 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right);$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1^i}{\partial u_2} &= \beta_{12} \xi_2^i, & \frac{\partial \xi_2^i}{\partial u_3} &= \beta_{23} \xi_3^i, & \frac{\partial \xi_3^i}{\partial u_1} &= \beta_{31} \xi_1^i, \\ \frac{\partial \xi_1^i}{\partial u_3} &= \beta_{13} \xi_3^i; & \frac{\partial \xi_2^i}{\partial u_1} &= \beta_{21} \xi_1^i, & \frac{\partial \xi_3^i}{\partial u_2} &= \beta_{32} \xi_2^i; \end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1^i}{\partial u_1} &= -\beta_{21} \xi_2^i - \beta_{31} \xi_3^i - \Sigma a_k x_k^i, \\ \frac{\partial \xi_2^i}{\partial u_2} &= -\beta_{32} \xi_3^i - \beta_{12} \xi_1^i - \Sigma b_k x_k^i, \\ \frac{\partial \xi_3^i}{\partial u_3} &= -\beta_{13} \xi_1^i - \beta_{23} \xi_2^i - \Sigma c_k x_k^i \\ (i &= 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n-3). \end{aligned}\right.$$

En écrivant que les équations (11), (12), (13) forment un système complet, on trouve que les rotations a_k, b_k, c_k, β_{ik} doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial u_2} &= \beta_{21} b_k, & \frac{\partial b_k}{\partial u_3} &= \beta_{32} c_k, & \frac{\partial c_k}{\partial u_1} &= \beta_{13} a_k, \\ \frac{\partial a_k}{\partial u_3} &= \beta_{31} c_k, & \frac{\partial b_k}{\partial u_1} &= \beta_{12} a_k, & \frac{\partial c_k}{\partial u_2} &= \beta_{23} b_k; \end{aligned}\right.$$

$$(15)\quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \qquad (i \neq k \neq l);$$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} + \sum_1^{n-3} a_k b_k &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12} \beta_{13} + \sum_1^{n-3} b_k c_k &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23} \beta_{21} + \sum_1^{n-3} c_k a_k &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (14), (15), (16) forment un système de $6n-9$ équations entre les $3n-3$ rotations a_k, b_k, c_k, β_{ik}. On pourrait, par les méthodes connues, chercher le degré de généralité de ce système, mais nous arriverons au résultat par une autre méthode (n° 26).

Nous dirons que le déterminant Δ, qui possède les propriétés que nous venons d'indiquer, est un *déterminant* O *d'ordre n*.

Des formules (12) on déduit immédiatement le résultat :

Les éléments des trois dernières lignes d'un déterminant O *sont les paramètres normaux des trois tangentes à un système point* O.

D'un déterminant O on peut déduire une infinité d'autres. Considérons, en effet, la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-3}^1 & x_{n-3}^2 & \dots & x_{n-3}^n \end{vmatrix}.$$

Effectuons sur les éléments des colonnes une même substitution orthogonale à coefficients constants; c'est-à-dire posons

$$(17)\qquad \begin{cases} x'^i_k = \alpha_k^1 x_1^i + \alpha_k^2 x_2^i + \dots + \alpha_k^{n-3} x_{n-3}^i \\ (k = 1, 2, \dots, n-3;\ i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

où les α sont les coefficients d'une substitution orthogonale à coefficients constants. Si dans le déterminant O on remplace x_k^i par x'^i_k, le nouveau déterminant ainsi obtenu est encore un déterminant O. Nous dirons que tous les déterminants, ainsi obtenus, sont *équivalents*.

Ces déterminants sont définis par leurs trois dernières lignes. La démonstration est analogue à celle que j'ai donnée, pour le cas de deux indéterminées, dans mon Mémoire : *Sur les systèmes cycliques et orthogonaux*, 1re Partie, p. 503.

Il y a donc un lien étroit entre la théorie des systèmes points O et celle des déterminants O. A chaque système point O on fait correspondre un déterminant O et un seul (on ne considère pas comme distincts deux déterminants O équivalents); de même à chaque déterminant O on peut faire correspondre une série parallèle de systèmes points O. Si

$M(X_1, \ldots, X_n)$ est un tel système O on aura

$$\frac{\partial X}{\partial u_k} = h_k \xi_k, \tag{18}$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial u_l} = \beta_{lk} h_l. \tag{19}$$

La résolution du système (19) introduit trois fonctions arbitraires d'une variable; les fonctions h étant connues, on aura les n coordonnées X à l'aide de quadratures. On obtient ainsi tous les systèmes points O qui correspondent à un même déterminant O. Par analogie avec ce qui se passe dans l'espace à trois dimensions, nous dirons que le déterminant O définit la *représentation sphérique* du système point M.

24. Systèmes O dans l'espace à trois dimensions. — Dans l'espace à trois dimensions le déterminant O est de la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix}, \tag{20}$$

et l'on a les formules

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \xi_k \qquad (k \neq i), \tag{21}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} &= -\beta_{21}\xi_2 - \beta_{31}\xi_3, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} &= -\beta_{32}\xi_3 - \beta_{12}\xi_1, \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_3} &= -\beta_{13}\xi_1 - \beta_{23}\xi_2. \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Les six rotations β_{ik} satisfont aux neuf équations

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \qquad (i \neq k \neq l), \tag{23}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12}\beta_{13} &= 0, \\ \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23}\beta_{21} &= 0. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

Les coordonnées X_1, X_2, X_3 du point M qui décrit un système O sont données par les quadratures

$$(25)\qquad \frac{\partial X}{\partial u_1} = h_1 \xi_1, \qquad \frac{\partial X}{\partial u_2} = h_2 \xi_2, \qquad \frac{\partial X}{\partial u_3} = h_3 \xi_3,$$

où les fonctions h_1, h_2, h_3 de Lamé satisfont aux conditions

$$(26)\qquad \frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} h_k.$$

(*Voir* les *Leçons sur les systèmes orthogonaux* de M. Darboux.)

On peut encore déterminer les coordonnées du point M de la façon suivante :

Désignons par p_1, p_2, p_3 les distances d'un point fixe O aux trois plans focaux de M ; de sorte que l'on aura

$$(27)\qquad X_i = p_1 \xi_1^i + p_2 \xi_2^i + p_3 \xi_3^i,$$

ou sous forme abrégée

$$(28)\qquad X = p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3.$$

Différentions ces équations par rapport à u_1, u_2, u_3 et écrivons que les dérivées de X sont égales à celles données par les formules (25); on trouve d'abord que p_1, p_2, p_3 doivent satisfaire aux équations (21), c'est-à-dire que l'on a

$$(29)\qquad \frac{\partial p_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} p_k.$$

Les fonctions h_1, h_2, h_3 de Lamé ont les valeurs suivantes :

$$(30)\qquad \left\{ \begin{aligned} h_1 &= \frac{\partial p_1}{\partial u_1} + \beta_{21} p_2 + \beta_{31} p_3, \\ h_2 &= \frac{\partial p_2}{\partial u_2} + \beta_{32} p_3 + \beta_{12} p_1, \\ h_3 &= \frac{\partial p_3}{\partial u_3} + \beta_{13} p_1 + \beta_{23} p_2. \end{aligned} \right.$$

Il résulte de ce qui précède qu'à des quadratures près, l'intégration des équations (21) et (26) forme des problèmes équivalents (on suppose connus les éléments de Δ).

25. Espaces d'ordre 4, 5, 6. — Dans un espace d'ordre 4 on a

$$(31)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \xi_1^4 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \xi_2^4 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \xi_3^4 \end{vmatrix},$$

avec les formules

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u_1} = a\xi_1, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = b\xi_2, \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = c\xi_3, \\ &\qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\xi_k \qquad (i \neq k), \\ &\frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} = -\beta_{21}\xi_2 - \beta_{31}\xi_3 - ax, \\ &\frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} = -\beta_{32}\xi_3 - \beta_{12}\xi_1 - bx, \\ &\frac{\partial \xi_3}{\partial u_3} = -\beta_{13}\xi_1 - \beta_{23}\xi_2 - cx, \end{aligned}\right.$$

où les rotations satisfont aux conditions

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial u_2} = \beta_{21} b, \quad \frac{\partial b}{\partial u_3} = \beta_{32} c, \quad \frac{\partial c}{\partial u_1} = \beta_{13} a, \\ &\frac{\partial a}{\partial u_3} = \beta_{31} c, \quad \frac{\partial b}{\partial u_1} = \beta_{12} a, \quad \frac{\partial c}{\partial u_2} = \beta_{23} b, \\ &\qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk}, \\ &\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} + ab = 0, \\ &\frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12}\beta_{13} + bc = 0, \\ &\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23}\beta_{21} + ca = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans un espace à cinq dimensions on a

$$(34)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^5 \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^5 \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^5 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^5 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \dots & \xi_3^5 \end{vmatrix},$$

avec les formules

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x_i}{\partial u_1} = a_i \xi_1, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = b_i \xi_2, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_3} = c_i \xi_3 \qquad (i = 1, 2),\\
&\qquad\qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \xi_k \qquad (i \neq k),\\
&\frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} = -\beta_{21}\xi_2 - \beta_{31}\xi_3 - a_1 x_1 - a_2 x_2,\\
&\frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} = -\beta_{32}\xi_3 - \beta_{12}\xi_1 - b_1 x_1 - b_2 x_2,\\
&\frac{\partial \xi_3}{\partial u_3} = -\beta_{13}\xi_1 - \beta_{23}\xi_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2,
\end{aligned}
\right.
$$

où les rotations satisfont aux équations

$$
(36)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial a_i}{\partial u_2} = \beta_{21} b_i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_3} = \beta_{32} c_i, \quad \frac{\partial c_i}{\partial u_1} = \beta_{13} a_i,\\
&\frac{\partial a_i}{\partial u_3} = \beta_{31} c_i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_1} = \beta_{12} a_i, \quad \frac{\partial c_i}{\partial u_2} = \beta_{23} b_i \qquad (i = 1, 2),\\
&\qquad\qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \qquad (i \neq k \neq l),\\
&\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0,\\
&\frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12}\beta_{13} + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0,\\
&\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23}\beta_{21} + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin dans l'espace à six dimensions on a

$$
(37)\qquad \Delta = \begin{vmatrix}
x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^6\\
x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^6\\
x_3^1 & x_3^2 & \dots & x_3^6\\
\xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^6\\
\xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^6\\
\xi_3^1 & \xi_3^2 & \dots & \xi_3^6
\end{vmatrix},
$$

avec les formules

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x_i}{\partial u_1} = a_i\xi_1, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = b_i\xi_2, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_3} = c_i\xi_3 \quad (i = 1, 2, 3),\\
&\frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} = \rho_{ik}\xi_k \quad (i \neq k),\\
&\frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} = -\rho_{21}\xi_2 - \beta_{31}\xi_3 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3,\\
&\frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} = -\rho_{32}\xi_3 - \rho_{12}\xi_1 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3,\\
&\frac{\partial \xi_3}{\partial u_3} = -\rho_{13}\xi_1 - \rho_{23}\xi_2 - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3,
\end{aligned}\right.$$

où les rotations satisfont aux équations

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial a_i}{\partial u_2} = \beta_{21}b_i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_3} = \rho_{32}c_i, \quad \frac{\partial c_i}{\partial u_1} = \beta_{13}a_i,\\
&\frac{\partial a_i}{\partial u_3} = \rho_{31}c_i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial u_1} = \rho_{12}a_i, \quad \frac{\partial c_i}{\partial u_2} = \rho_{23}b_i \qquad (i = 1, 2, 3).\\
&\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\rho_{lk} \quad (i \neq k \neq l),\\
&\frac{\partial \rho_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \rho_{31}\rho_{32} + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0,\\
&\frac{\partial \rho_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \rho_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12}\rho_{13} + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0,\\
&\frac{\partial \rho_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \rho_{13}}{\partial u_1} + \rho_{23}\beta_{21} + c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0.
\end{aligned}\right.$$

26. Passage d'un espace à l'espace d'ordre supérieur. — Considérons un système point O dans l'espace à n dimensions : soit $M(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ le point qui décrit le système. Les coordonnées X satisfont aux équations (6) (n° **2**); ces équations admettent aussi la solution

$$\rho = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2.$$

Cela posé, déterminons $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ par les équations

$$(40)\quad x_1 = \frac{4X_1}{4+\rho}, \quad \ldots, \quad x_i = \frac{4X_i}{4+\rho}, \quad \ldots, \quad x_{n+1} = \frac{4-\rho}{4+\rho};$$

on aura

$$(41) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Les quantités (x) satisfont toutes à des équations du type (6) (n° 2). Le point $N(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ qui est situé sur une sphère de rayon *un* décrit donc un système point O. A ce système on peut faire correspondre un déterminant O d'ordre $n+1$; dans ce déterminant on connaîtra d'abord les trois dernières lignes, qui sont les cosinus directeurs des tangentes du système N; en outre, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont les éléments d'une ligne de ce déterminant.

Inversement, à tout déterminant O d'ordre $n+1$ on peut faire correspondre des systèmes O dans l'espace à n dimensions. Si en effet $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont les éléments de l'une quelconque des $(n-2)$ premières lignes du déterminant O, on pourra déterminer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par les équations

$$(42) \qquad X_i = \frac{2x_i}{1 + x_{n+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'on aura

$$\rho = \sum_1^n X_i^2 = 4\,\frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}}.$$

Les quantités X et ρ satisfont à des équations du type (6) (n° 2) dont le point $M(X_1, \ldots, X_n)$ décrit un système O.

Ce passage d'un espace à l'espace d'ordre supérieur montre l'existence de déterminants O dans un espace d'ordre quelconque.

27. Droites normales à un système O. — Considérons, dans un espace à n dimensions $(n > 3)$, un point

$$M(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

qui décrit un système O; par le point M menons une droite D normale aux trois tangentes du système point, nous allons chercher dans quel cas cette droite D décrit un système. Si nous conservons les notations du n° 23, les paramètres directeurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de la droite D sont de la forme

$$(43) \qquad Y_i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \ldots + \alpha_{n-3} x_{n-3}^i.$$

Les coordonnées $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ d'un point N de la droite D

sont

$$(44) \qquad Z_i = X_i + \rho Y_i.$$

Ecrivons que si u_1 varie seul, la droite D enveloppe une courbe. En différentiant l'équation (44) par rapport à u_1, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial u_1} &= \xi_1 [h_1 + \rho(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{n-3} a_{n-3})] \\ &\quad + \rho\left(x_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} + x_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_1} + \ldots + x_{n-3} \frac{\partial \alpha_{n-3}}{\partial u_1}\right) \\ &\quad + \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \ldots + x_{n-3} \alpha_{n-3}).\end{aligned}$$

Pour que le point N décrive une courbe tangente à D, il faut que

$$(45) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1}}{\alpha_1} = \frac{\frac{\partial \alpha_2}{\partial u_1}}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial \alpha_{n-3}}{\partial u_1}}{\alpha_{n-3}}, \\ &h_1 + \rho(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots + a_{n-3} \alpha_{n-3}) = 0.\end{aligned}\right.$$

La première série de ces équations montre que le rapport de deux quelconques des quantités α est indépendant de u_1; on voit, de même, qu'il doit être indépendant de u_2 et de u_3; comme on peut multiplier toutes les quantités α par un même facteur, on voit que l'on peut supposer les quantités α constantes. Dans ces conditions, la droite D décrira un système; nous dirons alors que la droite D est une *normale* au système point.

Si $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n-3}^2 \neq 0$, la droite D sera dite une *normale ordinaire;* si, au contraire, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n-3}^2 = 0$, la droite D sera une *normale isotrope.*

Dans le cas d'une normale ordinaire, nous supposerons que la somme $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n-3}^2$ est égale à l'unité.

28. Systèmes plans normaux à système O. — Par un point $M(X_1, \ldots, X_n)$ qui décrit un système O, menons deux normales D et $\Delta (n > 4)$; je vais montrer que le plan D, Δ décrit un système. Désignons par $Y_1, \ldots, Y_n$ les paramètres directeurs de D, par $Z_1, \ldots, Z_n$ ceux de Δ, de sorte que l'on a

$$(46) \qquad \left\{\begin{aligned} Y &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-3} x_{n-3}, \\ Z &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_{n-3} x_{n-3},\end{aligned}\right.$$

où les α et les β sont des constantes; comme on peut toujours prendre dans le plan D, Δ deux normales rectangulaires, nous supposerons que ces normales rectangulaires sont les droites D et Δ elles-mêmes; de sorte que l'on aura

$$(47) \qquad \Sigma\alpha\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma YZ = 0.$$

Enfin, nous pouvons supposer aussi

$$(48) \qquad \begin{cases} \Sigma\alpha^2 = 1 \text{ ou } 0, & \Sigma Y^2 = 1 \text{ ou } 0, \\ \Sigma\beta^2 = 1 \text{ ou } 0, & \Sigma Z^2 = 1 \text{ ou } 0, \end{cases}$$

suivant que D ou Δ sont des normales ordinaires ou des normales isotropes.

Enfin, on aura, en tenant compte des équations du n° **23**,

$$(49) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial u_1} = A\xi_1, & \dfrac{\partial Y}{\partial u_2} = B\xi_2, & \dfrac{\partial Y}{\partial u_3} = C\xi_3, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial u_1} = A'\xi_1, & \dfrac{\partial Z}{\partial u_2} = B'\xi_2, & \dfrac{\partial Z}{\partial u_3} = C'\xi_3, \end{cases}$$

où A, B, C, A′, B′, C′ ont les valeurs suivantes :

$$(50) \qquad \begin{cases} A = \Sigma\alpha_k a_k, & B = \Sigma\alpha_k b_k, & C = \Sigma\alpha_k c_k, \\ A' = \Sigma\beta_k a_k, & B' = \Sigma\beta_k b_k, & C' = \Sigma\beta_k c_k. \end{cases}$$

Cela posé, un point quelconque $P(T_1, \ldots, T_n)$ du plan D, Δ a des coordonnées qui sont de la forme

$$(51) \qquad T = X + r_1 Y + \rho_1 Z.$$

En différentiant ces équations par rapport à u_2 et u_3, on trouve

$$(52) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u_2} = \xi_2(h_2 + Br_1 + B'\rho_1) + Y\dfrac{\partial r_1}{\partial u_2} + Z\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u_2}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial u_3} = \xi_3(h_3 + Cr_1 + C'\rho_1) + Y\dfrac{\partial r_1}{\partial u_3} + Z\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u_3}. \end{cases}$$

On voit que, si l'on détermine r_1 et ρ_1 par les équations

$$(53) \qquad h_2 + Br_1 + B'\rho_1 = 0, \qquad h_3 + Cr_1 + C'\rho_1 = 0,$$

on aura

$$(54) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u_2} = Y\dfrac{\partial r_1}{\partial u_2} + Z\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u_2}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial u_3} = Y\dfrac{\partial r_1}{\partial u_3} + Z\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u_3}. \end{cases}$$

Par conséquent, si u_1 reste fixe, le point P décrit un réseau dont les tangentes sont dans le plan D, Δ.

On pourra ainsi déterminer dans le plan D, Δ un point Q dont les coordonnées $(T'_1, \ldots, T'_n)$ sont données par les formules

$$(55)\quad \begin{cases} T' = X + r_2 Y + \rho_2 Z, \\ h_3 + r_2 C + \rho_2 C' = 0, \qquad h_1 + r_2 A + \rho_2 A' = 0, \end{cases}$$

et, enfin, un point $R(T''_1, \ldots, T''_n)$ défini par les formules

$$(56)\quad \begin{cases} T'' = X + r_3 Y + \rho_3 Z, \\ h_1 + r_3 A + \rho_3 A' = 0, \qquad h_2 + r_3 B + \rho_3 B' = 0. \end{cases}$$

On voit facilement que le plan D, Δ décrit un système ayant pour points focaux les points P, Q, R.

Cela posé, si u_1 reste fixe, le ds^2 du réseau décrit par P est

$$(57)\quad \begin{cases} ds^2 = \left[\left(\frac{\partial r_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial u_3}\right)^2\right] \times \Sigma Y^2 \\ \qquad + \left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u_3}\right)^2\right] \times \Sigma Z^2, \end{cases}$$

avec des formules analogues pour les ds^2 des réseaux Q et R quand on suppose que u_2 ou u_3 respectivement restent fixes.

Si maintenant D et Δ sont des normales ordinaires, il existera dans l'espace à deux dimensions des points $P'(r_1, \rho_1)$, $Q'(r_2, \rho_2)$, $R'(r_3, \rho_3)$ qui sont les foyers d'un système plan; le réseau P sera applicable sur P′ si u_1 est fixe, Q sur Q′ si u_2 est fixe et enfin R sur R′ si u_3 est fixe.

Si D et Δ sont deux normales isotropes (rectangulaires comme nous l'avons supposé dès le début), P décrit un réseau nul si u_1 est fixe, de même Q et R si u_2 ou u_3 restent respectivement fixes. Dans ce cas, nous dirons que le plan D, Δ décrit un système R; un tel système ne peut exister que si $n \geqq 7$.

29. Systèmes points normaux à un système O. — Par un point $M(X_1, \ldots, X_n)$ qui décrit un système O, menons trois normales $D(Y_1, \ldots, Y_n)$, $D'(Y'_1, \ldots, Y'_n)$, $D''(Y''_1, \ldots, Y''_n)$ non situées dans un même plan; nous pouvons toujours supposer que les droites D, D′, D″ sont deux à deux rectangulaires, c'est-à-dire que

$$(58)\qquad \Sigma Y' Y'' = 0, \qquad \Sigma Y'' Y = 0. \qquad \Sigma Y Y' = 0$$

et, en outre, on peut supposer que

$$(59)\qquad \Sigma Y^2 = 1 \text{ ou } 0, \qquad \Sigma Y'^2 = 1 \text{ ou } 0, \qquad \Sigma Y''^2 = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que les normales considérées sont des normales ordinaires ou des normales isotropes.

On aura ensuite

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u_1} &= A\,\xi_1, & \frac{\partial Y}{\partial u_2} &= B\,\xi_2, & \frac{\partial Y}{\partial u_3} &= C\,\xi_3,\\ \frac{\partial Y'}{\partial u_1} &= A'\xi_1, & \frac{\partial Y'}{\partial u_2} &= B'\xi_2, & \frac{\partial Y'}{\partial u_3} &= C'\xi_3,\\ \frac{\partial Y''}{\partial u_1} &= A''\xi_1, & \frac{\partial Y''}{\partial u_2} &= B''\xi_2, & \frac{\partial Y''}{\partial u_3} &= C''\xi_3. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, un point $N(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ situé dans le trièdre $MDD'D''$ a des coordonnées qui sont de la forme

$$(61)\qquad Z = X + \lambda Y + \mu Y' + \nu Z'.$$

En différentiant l'équation (53) successivement par rapport à u_1, u_2, u_3, on trouve

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u_1} &= \xi_1(h_1 + A\lambda + A'\mu + A''\nu) + Y\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} + Y'\frac{\partial\mu}{\partial u_1} + Y''\frac{\partial\nu}{\partial u_1},\\ \frac{\partial Z}{\partial u_2} &= \xi_2(h_2 + B\lambda + B'\mu + B''\nu) + Y\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} + Y'\frac{\partial\mu}{\partial u_2} + Y''\frac{\partial\nu}{\partial u_2},\\ \frac{\partial Z}{\partial u_3} &= \xi_3(h_3 + C\lambda + C'\mu + C''\nu) + Y\frac{\partial\lambda}{\partial u_3} + Y'\frac{\partial\mu}{\partial u_3} + Y''\frac{\partial\nu}{\partial u_3}. \end{aligned}\right.$$

On voit que, si l'on détermine λ, μ, ν par les équations

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} h_1 + A\lambda + A'\mu + A''\nu &= 0,\\ h_2 + B\lambda + B'\mu + B''\nu &= 0,\\ h_3 + C\lambda + C'\mu + C''\nu &= 0, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u_1} &= Y\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} + Y'\frac{\partial\mu}{\partial u_1} + Y''\frac{\partial\nu}{\partial u_1},\\ \frac{\partial Z}{\partial u_2} &= Y\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} + Y'\frac{\partial\mu}{\partial u_2} + Y''\frac{\partial\nu}{\partial u_2},\\ \frac{\partial Z}{\partial u_3} &= Y\frac{\partial\lambda}{\partial u_3} + Y'\frac{\partial\mu}{\partial u_3} + Y''\frac{\partial\nu}{\partial u_3}. \end{aligned}\right.$$

On vérifie facilement que le point N ainsi déterminé décrit un système, qu'il en est de même du point N′ de l'espace à trois dimensions qui a pour coordonnées λ, μ, ν.

Le système point décrit par N est dit *normal* au système point M.

Des formules (56) on déduit, pour le ds^2 du point N,

$$(65) \qquad ds^2 = d\lambda^2 \times \Sigma Y^2 + d\mu^2 \times \Sigma Y'^2 + d\nu^2 \times \Sigma Y''^2.$$

Il résulte de là que si D, D′, D″ sont toutes des normales ordinaires, le ds^2 du point N est le même que celui du point N′; les systèmes points décrits par N et N′ sont dits *applicables*.

Si les normales D, D′, D″ sont toutes isotropes (ce qui ne peut avoir lieu que si $n \geqq 9$), le ds^2 du point N est nul; nous dirons que le point N décrit un *système nul* ou, pour abréger, un *système* N.

CHAPITRE VI.

SYSTÈMES QUI SE RATTACHENT AUX SYSTÈMES O.

30. Systèmes p, O. — Un point M de l'espace à n dimensions décrit un système p, O lorsqu'il peut être considéré comme la projection d'un système O de l'espace à $n+p-1$ dimensions; si donc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de M, les équations de Laplace auxquelles satisfont ces n coordonnées devront admettre, en outre, $p-1$ solutions $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ telles que

$$(1) \qquad \Sigma\, dx^2 + \Sigma\, dy^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2,$$

les fonctions h_1, h_2, h_3 étant toutes différentes de zéro; $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ sont les coordonnées complémentaires du réseau.

31. Systèmes N, pN. — Un système point est appelé *système* N (nul) quand son ds^2 est égal à zéro; si donc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées du point qui décrit le système, on devra avoir

$$(2) \qquad \Sigma\, dx^2 = 0.$$

Nous supposerons, de plus, qu'il n'existe pas de singularité d'ordre plus élevé, c'est-à-dire que

$$(3) \qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}\right)^2 \neq 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_3^2}\right)^2 \neq 0.$$

Nous avons formé de pareils systèmes (n° **29**); il résultera de ce qui va suivre que tous ces systèmes peuvent être obtenus par la méthode indiquée; de tels systèmes ne peuvent exister que si $n \geqq 9$.

Un système point de l'espace à n dimensions est dit un *système* p, N quand on peut le considérer comme étant la projection d'un système N de l'espace à $n+p-1$ dimensions; si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées du point décrivant, les équations de Laplace auxquelles satisfont les coor-

données admettent $p-1$ solutions $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ telles que

$$(4) \qquad \Sigma\, dx^2 + \Sigma\, dy^2 = 0$$

et l'on aura, en outre,

$$(5) \qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_k^2}\right)^2 + \sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_k^2}\right)^2 \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

$y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ sont les coordonnées complémentaires du système p, N.

32. Systèmes droites $\mathrm{I}, p\mathrm{I}$. — Un système de droites D est appelé I si la somme des carrés des paramètres directeurs $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de la droite D est nulle. On suppose, de plus, qu'il n'existe pas de singularités d'ordre plus élevé. On a donc

$$(6) \qquad \sum \mathrm{X}^2 = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u_k}\right)^2 \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Les normales isotropes d'un système O (n° **27**) forment un système I; nous verrons que tous les systèmes I peuvent être formés ainsi; ces systèmes ne peuvent exister que si $n \geq 5$.

Le système droite sera dit p, I, s'il peut être formé par la projection d'un système I de l'espace à $n+p-1$ dimensions; les équations de Laplace dont les quantités X sont solutions admettent en outre $p-1$ solutions $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{p-1}$ telles que

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum \mathrm{X}^2 + \sum \mathrm{Y}^2 = 0, \\ \sum\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u_k}\right)^2 + \sum\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u_k}\right)^2 \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

$\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_{p-1}$ sont les paramètres complémentaires du système p, I.

En particulier, les normales ordinaires (n° **27**) d'un système O décrivent des systèmes $2\mathrm{I}$; et l'on obtient ainsi tous les systèmes $2\mathrm{I}$.

33. Systèmes droites C, pC. — Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ les paramètres d'une droite qui décrit un système; ces paramètres sont solutions des équations (8) (Chap. I); cela posé, nous dirons que le système droite est C si l'on a

$$(8) \qquad \Sigma \mathrm{X}^2 = \mathrm{H}_1^2 \mathrm{U}_1^2 + \mathrm{H}_2^2 \mathrm{U}_2^2 + \mathrm{H}_3^2 \mathrm{U}_3^2,$$

U_1, U_2, U_3 étant respectivement des fonctions de u_1 seul, de u_2 et de u_3 seuls; ces fonctions ne se réduisent jamais à zéro. On voit facilement que cette condition (8) est indépendante du facteur par lequel on peut multiplier tous les paramètres $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la droite.

Le système droite sera dit p, C, si les équations (8) (Chap. I) admettent $p-1$ solutions $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ telles que

$$\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 = H_1^2 U_1^2 + H_2^2 U_2^2 + H_3^2 U_3^2. \tag{9}$$

34. Systèmes droites J, pJ. — Le système décrit par une droite D, dont les paramètres sont $X_1, X_2, \ldots, X_n$, est appelé *système* J si l'on a

$$\Sigma X^2 = 0, \qquad \Sigma\, dX^2 = 0. \tag{10}$$

On suppose de plus qu'il n'y a pas de singularités d'ordre plus élevé, c'est-à-dire que

$$\sum \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_k^2}\right)^2 \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3); \tag{11}$$

de tels systèmes n'existent que si $n \geq 11$.

Le système décrit par la droite D sera p, J si les équations de Laplace, dont les X sont solutions, admet $p-1$ solutions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma X^2 + \Sigma Y^2 = 0, \qquad \Sigma\, dX^2 + \Sigma\, dY^2 = 0, \\ \sum \left(\dfrac{\partial^2 X}{\partial u_k^2}\right)^2 + \sum \left(\dfrac{\partial^2 Y}{\partial u_k^2}\right)^2 \neq 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \end{array}\right. \tag{12}$$

35. Systèmes plans Ω, $p\Omega$. — Tout système plan assemblé à un point O sera appelé un *système* Ω; un système plan de l'espace à n dimensions sera dit p, Ω, si l'on peut le considérer comme la projection d'un système Ω de l'espace à $n+p-1$ dimensions.

Nous nous bornerons ici à cette définition, sans insister sur les propriétés des systèmes Ω.

36. Systèmes plans R, pR. — Soient P un plan qui décrit un système dans l'espace à n dimensions; A, B, C ses points focaux d'ordre 1, 2, 3; nous disons que le plan P décrit un *système* R lorsque, u_1 restant fixe, le point A décrit un réseau nul; de même quand u_2 reste fixe, B décrit un réseau nul; enfin, quand u_3 reste fixe, C décrit un réseau nul.

Si donc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de A; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ celles de B; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ celles de C, on aura

$$(13)\quad \begin{cases} \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 = 0, & \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\right)^2 = 0, & \sum\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2 = 0, \\ \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2 = 0, & \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 = 0, & \sum\left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Nous avons indiqué (n° 28) un mode de formation des systèmes R; on verra d'ailleurs, par ce qui va suivre, qu'ils peuvent toujours être obtenus ainsi; de tels systèmes n'existent que pour $n \geqq 7$.

Le système décrit par le plan P sera dit un *système* p, R s'il peut être considéré comme étant la projection d'un système R de l'espace à $n + p - 1$ dimensions.

37. Passage des systèmes O aux systèmes I. — *Tout point assemblé à une droite* I *est* O. — Pour abréger, nous supprimerons dorénavant le mot *système* devant les mots *point, droite* et *plan;* ainsi la propriété énoncée sous forme abrégée doit correctement s'énoncer ainsi : *Tout système point assemblé à un système droite* I *est un système* O.

D'une manière générale :

Parmi les points assemblés à une droite p, I,

$$\begin{array}{rl} \infty^{p-3} & \textit{sont}\ \ p-2,\ \mathrm{O}, \\ \infty^{p-2} & \textit{sont}\ \ p-1,\ \mathrm{O}; \\ \textit{les autres} & \textit{sont}\ \ p,\ \mathrm{O}. \end{array}$$

Même démonstration que dans le cas des deux indéterminées [voir *Systèmes cycliques et orthogonaux* (*A. E. N.*, 1903, n° 24)].

Inversement, considérons un système O; parmi les droites assemblées il y en a qui sont I, ce sont celles qui sont formées par les normales isotropes; d'autres sont 2I, elles sont formées par les normales ordinaires (n° 27); tous les autres systèmes assemblés sont 3I; donc :

Parmi les droites assemblées à un point O,

$$\begin{array}{rl} \infty^{n-5} & \textit{sont}\ \ \mathrm{I}, \\ \infty^{n-4} & \textit{sont}\ \ 2\mathrm{I}; \\ \textit{les autres} & \textit{sont}\ \ 3\mathrm{I}. \end{array}$$

En remarquant qu'un système p, O est la projection d'un système O de l'espace à $n + p - 1$ dimensions, on conclut :

Parmi les droites assemblées à un point p, O,

$$\begin{aligned} \infty^{n+p-4} \quad & \textit{sont} \quad p, \mathrm{I}, \\ \infty^{n+p-3} \quad & \textit{sont} \quad (p+1), \mathrm{I}; \\ \textit{les autres} \quad & \textit{sont} \quad (p+2), \mathrm{I}. \end{aligned}$$

38. Passage des systèmes O aux systèmes Ω. — *Tout plan assemblé à un point* O est Ω; c'est la définition des systèmes Ω.

Considérons, maintenant, un point $\mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n)$ qui décrit un système 2O et soit y la coordonnée complémentaire (n° **30**). Pour former un plan assemblé au point M, on se sert (n° **14**) d'une solution θ des équations de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées x; si $\theta = ky$, k étant une constante, le plan assemblé sera Ω; dans le cas contraire il sera 2Ω; donc :

Parmi les plans assemblés à un point 2O,

Une série de plans parallèles sont Ω,
les autres sont 2Ω.

Considérons de même un point $\mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n)$ qui décrit un réseau p, O et soient $(y_1, y_2, \ldots, y_{p-1})$ les coordonnées complémentaires :

Si θ *est une fonction linéaire isotrope des* y, *le plan assemblé est* $(p-2)$, Ω.

Si θ *est une fonction linéaire des* y, *le plan assemblé est* $(p-1)$, Ω.

Enfin, dans le cas général, le plan assemblé est pΩ.

Inversement, partons des systèmes Ω; soit d'abord P un plan que décrit un système Ω; A, B, C ses points focaux. Dans l'espace à trois dimensions, il y a deux points assemblés M et M′ qui décrivent des systèmes O; ces points M et M′ sont symétriques par rapport au plan A, B, C. Dans les espaces d'ordre supérieur il y a une infinité de points M qui décrivent des systèmes O assemblés au plan P, ces systèmes sont en nombre ∞^{n-3}; pour tous ces systèmes, les tétraèdres MABC sont égaux. Nous nous bornons ici à ces indications et nous énoncerons, sans démonstration, le résultat suivant :

Parmi les points assemblés à un plan Ω, *dans l'espace*

à n dimensions.

$$\begin{array}{rcl} x^{n-3} & \textit{sont} & 0, \\ x^{n-2} & \textit{sont} & 2\,0; \\ \textit{les autres} & \textit{sont} & 3\,0; \end{array}$$

et en remarquant qu'un plan $p\Omega$ est la projection d'un plan Ω dans un espace à $n+p-1$ dimensions :

Parmi les points assemblés à un plan p,Ω,

$$\begin{array}{rcl} x^{n+p-4} & \textit{sont} & p,\ 0, \\ x^{n+p-3} & \textit{sont} & p+1,\ 0; \\ \textit{les autres} & \textit{sont} & p+2,\ 0. \end{array}$$

39. Passage des systèmes N aux systèmes J. — Soit $D(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une droite qui décrit un système J; les points assemblés à D sont parallèles à ceux qui sont assemblés à une droite Δ parallèle à D et passant par l'origine des coordonnées. Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un tel point M sont données par les formules

$$x_i = \frac{X_i}{\rho},$$

ρ étant une solution des équations de Laplace auxquelles satisfont les quantités X. Cela posé, des formules (10) on déduit

$$\Sigma\, dx^2 = 0,$$

par conséquent le système M est un système nul; il en est de même de tous les systèmes parallèles, donc :

Tout point assemblé à une droite J *est* N.

Supposons maintenant que la droite $D(X_1, \ldots, X_n)$ décrive un système p,J; soient $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ les coordonnées complémentaires.

Comme ici il s'agit de propriétés qui ne dépendent que de la direction des éléments, nous pouvons supposer que la droite D passe par l'origine. Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un point M assemblé à cette droite seront

$$x_i = \frac{X_i}{\rho}; \tag{14}$$

posons

$$y_i = \frac{\rho}{Y_i}, \tag{15}$$

ρ étant une solution des équations de Laplace auxquelles satisfont les quantités X et Y. Des formules (12) on déduit

$$\Sigma\, dx^2 + \Sigma\, dy^2 = 0. \tag{16}$$

Cela posé, si ρ est une combinaison isotrope des Y, on pourra, dans (16), supprimer deux des quantités y; si ρ est une combinaison linéaire, on pourra en supprimer une, donc :

Parmi les points assemblés à une droite p, J,

$$\begin{array}{lll} \infty^{p-3} & \textit{sont} & (p-2),\ \mathrm{N}, \\ \infty^{p-2} & \textit{sont} & (p-1),\ \mathrm{N}; \\ \textit{les autres} & \textit{sont} & p,\ \mathrm{N}. \end{array}$$

Inversement, soit M un point qui décrit un système N; pour obtenir les paramètres, de toutes les droites $\mathrm{D}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ assemblées à M, il suffit de joindre l'origine à un point $\mathrm{M}'(x_1, \ldots, x_n)$ qui décrit un système parallèle à M; on aura donc

$$\mathrm{X}_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Posons

$$\mathrm{X}_{n+1} = \frac{i}{2}(\Sigma x^2 + 1), \qquad \mathrm{X}_{n+2} = \frac{1}{2}(\Sigma x^2 - 1). \tag{18}$$

On aura

$$\sum_1^{n+2} \mathrm{X}^2 = 0 \tag{19}$$

et

$$\sum_1^{n+2} d\mathrm{X}^2 = \sum_1^{n} dx^2 = 0. \tag{20}$$

Si maintenant $\Sigma x^2 = 0$, on pourra supprimer dans les équations (19) et (20) les coordonnées X_{n+1} et X_{n+2}; la droite D décrira un système J. Si Σx^2 est une constante, on pourra réduire les deux coordonnées X_{n+1} et X_{n+2} à une seule, la droite D décrira un système 2J; enfin, si Σx^2 n'est pas constant, la droite D décrit un système 3J. On voit alors qu'on a le résultat suivant :

Parmi les droites assemblées à un point N,

$$\begin{array}{lll} \infty^{n-9} & \textit{sont} & \mathrm{J}, \\ \infty^{n-8} & \textit{sont} & 2\mathrm{J}; \\ \textit{les autres} & \textit{sont} & 3\mathrm{J}. \end{array}$$

D'une manière générale :

Pour les droites assemblées à un point p, N,

$$\begin{aligned} \infty^{n+p-8} &\ \textit{sont}\ \ p, \mathrm{J}, \\ \infty^{n+p-7} &\ \textit{sont}\ \ (p-1), \mathrm{J}; \\ \textit{les autres} &\ \textit{sont}\ \ (p+2), \mathrm{J}. \end{aligned}$$

40. Passage des systèmes N aux systèmes R. — Soit M un point qui décrit un système N; $\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^n, \xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^n, \xi_3^1, \xi_3^2, \ldots, \xi_3^n$ les paramètres normaux des tangentes MT_1, MT_2, MT_3 à ce point; on aura

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\xi_1^2 = 0, \quad \Sigma\xi_2^2 = 0, \quad \Sigma\xi_3^2 = 0, \\ &\Sigma\xi_2\xi_3 = 0, \quad \Sigma\xi_3\xi_1 = 0, \quad \Sigma\xi_1\xi_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Par l'origine, menons des droites OT_1', OT_2', OT_3' parallèles aux tangentes MT_1, MT_2, MT_3; ces droites définissent un système *réduit à l'origine* parallèle au système M. Comme ici la direction des éléments est seule en cause, on peut raisonner sur ce système réduit comme sur le système M; soit alors P un plan assemblé à ce système réduit; A, B, C ses points focaux d'ordre 1, 2, 3; p_1, p_2, p_3 des solutions quelconques des équations [(1), n° 2]; les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de A, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de B, $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de C seront données par les formules

$$(22)\qquad x_i = \frac{\xi_1^i}{p_1}, \qquad y_i = \frac{\xi_2^i}{p_2}, \qquad z_i = \frac{\xi_3^i}{p_3}.$$

On en déduit, en tenant compte des équations (21) et des équations [(1), n° 2],

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\right)^2 = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2 = 0, \\ &\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2 = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

par conséquent (35), le plan P décrit un système R, donc :

Tout plan assemblé à un point N *est* R.

En introduisant les coordonnées complémentaires d'un système p, N et en répétant un raisonnement déjà fait plusieurs fois, on a le résultat suivant :

Parmi les plans assemblés à un point p, N,

$$\begin{aligned} \infty^{p-2} &\ \textit{sont}\ \ (p-2), \mathrm{R}, \\ \infty^{p-1} &\ \textit{sont}\ \ (p-1), \mathrm{R}; \\ \textit{les autres} &\ \textit{sont}\ \ p, \mathrm{R}. \end{aligned}$$

Inversement, les points assemblés à un plan R peuvent être N, 2N, 3N; en général, ils sont 3N.

D'une manière générale, les points assemblés à un plan pR peuvent être pN, $(p+1)$, N, $(p+2)$, N; en général, ils sont $(p+2)$, N.

41. Passage du système R aux systèmes I. — *Toute droite assemblée à un plan* R *est* I. — En effet, soit P un plan qui décrit un système R; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les paramètres de sa première droite focale; on aura

$$(24) \qquad \sum X^2 = 0, \qquad \sum X \frac{\partial X}{\partial u_1} = 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u_1}\right)^2 = 0.$$

Soit $D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ une droite assemblée à ce plan; on aura

$$Y_i = \alpha X_i + \beta \frac{\partial X_i}{\partial u_1}.$$

En élevant au carré et en tenant compte des équations (24), on a

$$(25) \qquad \Sigma Y^2 = 0$$

et, par conséquent, D décrit un système I.

En introduisant les coordonnées complémentaires et en raisonnant comme précédemment, on arrive aux résultats suivants :

Parmi les droites assemblées à un plan pR,

$$\begin{aligned} \infty^{p-3} \quad & \textit{sont} \quad (p-2), \mathrm{I}, \\ \infty^{p-2} \quad & \textit{sont} \quad (p-1), \mathrm{I}; \\ \textit{les autres} \quad & \textit{sont} \quad p, \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Inversement, soit D une droite I, c'est une normale isotrope d'un système O; si on l'associe avec une normale isotrope perpendiculaire Δ, on obtient un plan D, Δ qui est R; si on l'associe à une normale ordinaire Δ, le plan D, Δ sera 2R; enfin, si le plan assemblé à D est quelconque, ce plan sera 3R.

D'une manière générale, les plans assemblés à une droite p, I sont (p), R; $(p+1)$, R ou $(p+2)$, R; en général, ils sont $p+2$, R.

42. Passage des systèmes C aux systèmes Ω. — *Toute*

droite assemblée à un plan Ω *est* C. — En effet, une telle droite D peut être considérée comme l'intersection de deux plans P et Q assemblés à un même système O. On peut, sans inconvénient, réduire ce système à l'origine o; soient alors A, B, C les foyers de P, A′, B′, C′ ceux de Q, on aura

$$oA = \frac{1}{p_1}, \qquad oB = \frac{1}{p_2}, \qquad oC = \frac{1}{p_3},$$

$$oA' = \frac{1}{q_1}, \qquad oB' = \frac{1}{q_2}, \qquad oC' = \frac{1}{q_3},$$

où p_1, p_2, p_3, d'une part, et q_1, q_2, q_3, d'autre part, sont des systèmes de solutions des équations (12), Chapitre V. Les paramètres directeurs de la droite D sont

$$(26) \quad X_i = \xi_1^i(p_2q_3 - q_2p_3) + \xi_2^i(p_3q_1 - p_1q_3) + \xi_3^i(p_1q_2 - q_1p_2).$$

On forme facilement les équations de Laplace auxquelles satisfont ces fonctions X; on vérifiera alors la propriété caractéristique (32) des droites C.

En introduisant les coordonnées complémentaires, on arrive aux résultats suivants :

Parmi les droites assemblées à un plan p, Ω,

$$\begin{aligned} \infty^{p-3} \quad & \textit{sont} \quad (p-2), \mathrm{C}, \\ \infty^{p-2} \quad & \textit{sont} \quad (p-1), \mathrm{C}; \\ \textit{les autres} \quad & \textit{sont} \quad p, \mathrm{C}. \end{aligned}$$

Inversement, les plans assemblés à une droite C peuvent être Ω, 2Ω ou 3Ω; en général, ils sont 3Ω; de même, les plans assemblés à une droite p, C peuvent être p, Ω; $(p+1)$, Ω ou $(p+2)$, Ω; en général, ils sont $p+2$, Ω.

43. Étude générale des singularités. — Les éléments que nous avons introduits suffisent pour les applications que nous avons en vue; néanmoins, si l'on veut faire une étude complète de la question, il faut définir les singularités d'ordre quelconque.

J'ai déjà, dans le cas de deux indéterminées, défini les réseaux singuliers et les congruences singulières (p, q), *Sur les problèmes de Géométrie* (*Comptes rendus*, 1904, 1er semestre). Il s'agit d'indiquer les résultats analogues pour la Géométrie à trois indéterminées. Pour cela, nous passerons en revue successivement les systèmes points, droites et plans.

Systèmes points. — Le système point type que nous coterons (0, 0, 0) est le système O pour lequel on a

$$ds^2 = \Sigma\, dx^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^3 + h_3^2\, du_3^2,$$

les fonctions h_1, h_2, h_3 étant toutes différentes de zéro.

Si maintenant on suppose h_1 nul, le réseau rectangulaire correspondant est singulier; nous dirons qne ce réseau *est p fois singulier du côté des* u_1 si l'on a

$$(27)\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial^k x}{\partial u_1^k}\right)^2 = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

et

$$(28)\qquad \sum\left(\frac{\partial^{p+1} x}{\partial u_1^{p+1}}\right)^2 \neq 0.$$

Cela posé, si un système rectangulaire (22) est singulier p fois du côté des u_1, q fois du côté des u_2, r fois du côté des u_3, le système sera coté (p, q, r).

D'une manière plus générale, un système point M *appartiendra au type* (p, q, r) s'il peut être considéré comme étant la projection d'un système rectangulaire (p, q, r).

Ainsi, un système N est un système (1, 1, 1); un système p, N appartient au type (1, 1, 1).

Systèmes droites. — Le système droite type coté (0, 0, 0) est le système C. On sait que si X_1, X_2, ..., X_n sont les paramètres d'une droite qui décrit un système C, ces paramètres sont solutions des équations (8), Chapitre Ier, et que l'on a

$$\Sigma X^2 = H_1^2 U_1^2 + H_2^2 U_2^2 + H_3^2 U_3^2.$$

Si la fonction U_1 est nulle, le système est *singulier une fois du côté des* u_1; si, de plus, on a

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum\left(\dfrac{\partial X}{\partial u_1}\right)^2 = 0, \quad \sum\left(\dfrac{\partial^k X}{\partial u_1^k}\right)^2 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p-1), \\ \qquad\qquad \sum\left(\dfrac{\partial^p X}{\partial u_1^p}\right)^2 \neq 0, \end{array}\right.$$

le système droite est *p fois singulier du côté des* u_1.

Cela posé, si un système droite est p fois singulier du côté des u_1, q fois du côté des u_2, r fois du côté des u_3, le système sera coté (p, q, r).

D'une manière plus générale, un système droite D *appartient au type* (p, q, r) s'il peut être considéré comme la projection d'un système (p, q, r).

Ainsi, un système I est un système (1, 1, 1); un système J est un système (2, 2, 2); un système (2I) appartient au type (1, 1, 1).

Systèmes plans. — Le système plan type coté (0, 0, 0) est le système Ω. Considérons maintenant un système plan quelconque P et soient $A(x_1, \ldots, x_n)$; $B(y_1, \ldots, y_n)$; $C(z_1, \ldots, z_n)$ ses points focaux d'ordre 1, 2, 3; les quantités $\frac{\partial y}{\partial u_3}$ et $\frac{\partial z}{\partial u_2}$ sont proportionnelles, car elles représentent les paramètres directeurs de la droite BC. Il en résulte que les deux systèmes d'équations

$$(30) \qquad \sum\left(\frac{\partial^k y}{\partial u_3^k}\right)^2 = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial^{p+1} y}{\partial u_3^{p+1}}\right)^2 \neq 0,$$

$$(31) \qquad \sum\left(\frac{\partial^k z}{\partial u_2^k}\right)^2 = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial^{p+1} z}{\partial u_2^{p+1}}\right)^2 \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

sont équivalents. Si les conditions (30) ou (31) existent, nous disons que le *système plan est p fois singulier du côté des* u_1.

Cela posé, si un système plan est p fois singulier du côté des u_1, q fois du côté des u_2, r fois du côté des u_3, le système sera coté (p, q, r).

D'une manière plus générale, un système plan appartient au type (p, q, r) s'il peut être considéré comme étant la projection d'un système (p, q, r).

Ainsi un système R est un système (1, 1, 1); un système p,R appartient au type (1, 1, 1).

44. Propriétés des systèmes singuliers. — Pour abréger, nous nous bornerons à indiquer ici, sans démonstration, les principales propriétés de ces systèmes singuliers. Nous indiquerons successivement les propriétés qui dérivent de la loi d'orthogonalité des éléments, puis les propriétés focales et, enfin, les propriétés des systèmes assemblés.

Loi d'orthogonalité des éléments :

1° Espaces d'ordre $3n$. A un point appartenant au type

(p, q, r) correspond un point appartenant au type (p', q', r') et l'on a

$$(32) \qquad p + p' = q + q' = r + r' = n - 1.$$

A une droite appartenant au type (p, q, r) correspond un plan appartenant au type (p', q', r') et inversement, et l'on a

$$(33) \qquad p + p' = q + q' = r + r' = n.$$

2° Espaces d'ordre $3n + 1$.

A un plan du type (p, q, r) correspond un plan du type (p', q', r') et l'on a

$$(34) \qquad p + p' = q + q' = r + r' = n.$$

A un point du type (p, q, r) correspond une droite du type (p', q', r') et l'on a

$$(35) \qquad p + p' = q + q' = r + r' = n.$$

3° Espace d'ordre $3n + 2$.

A une droite du type (p, q, r) correspond une droite du type (p', q', r') et l'on a

$$(36) \qquad p + p' = q + q' = r + r' = n + 1.$$

A un point du type (p, q, r) correspond un plan du type (p', q', r') et inversement, et l'on a

$$(37) \qquad p + p' = q + q' = r + r' = n.$$

Propriétés focales. — Les propriétés focales sont données par les Tableaux suivants :

(38) point (p, q, r) $\begin{cases} \text{1re droite focale } (p, q+1, r+1), \\ \text{1er plan focal } (p+1, q, r); \end{cases}$

(39) droite (p, q, r) $\begin{cases} \text{1er point focal } (p, q-1, r-1), \\ \text{1er plan focal } (p-1, q, r); \end{cases}$

(40) plan (p, q, r) $\begin{cases} \text{1er point focal } (p-1, q, r), \\ \text{1re droite focale } (p+1, q, r). \end{cases}$

Propriétés des systèmes assemblés. — Ces propriétés sont

données par les Tableaux suivants :

(41) point (p, q, r) $\begin{cases} \text{droite assemblée } (p+1, q+1, r+1), \\ \text{plan assemblé } (p, q, r); \end{cases}$

(42) droite (p, q, r) $\begin{cases} \text{point assemblé } (p-1, q-1, r-1), \\ \text{plan assemblé } (p, q, r); \end{cases}$

(43) plan (p, q, r) $\begin{cases} \text{point assemblé } (p, q, r), \\ \text{droite assemblée } (p, q, r). \end{cases}$

Pour terminer, nous indiquerons l'espace d'ordre minimum, dans lequel peut exister un système (p, q, r) : cet espace d'ordre minimum n est donné par les formules

(44) point (p, q, r), $n = 2(p+q+r)+3$,

(45) droite (p, q, r), $n = 2(p+q+r)-1$,

(46) plan (p, q, r), $n = 2(p+q+r)+1$.

Ainsi, par exemple, un système N qui est (1, 1, 1) ne peut pas exister dans un espace de moins de neuf dimensions; un système R qui est (1, 1, 1) n'existe pas dans un espace qui a moins de sept dimensions, enfin un système I qui est (1, 1, 1) n'existe pas dans un espace de moins de cinq dimensions.

45. Remarques. — Les systèmes singuliers appartenant au type (p, q, r) ne sont définis que si les nombres p, q, r sont des entiers positifs ou nuls; les propriétés qui précèdent permettent de les définir quand un ou plusieurs des nombres p, q, r sont des entiers négatifs.

Enfin, il importe de remarquer qu'un même système peut appartenir à deux types différents; nous en indiquerons des exemples plus loin.

Il importe maintenant d'indiquer les principales propriétés des systèmes définis dans les espaces d'ordre 3, 4, 5 et 6.

46. Espace à trois dimensions. — Dans un espace à trois dimensions il existe des systèmes O et, *a fortiori*, des systèmes pO; parmi les systèmes du type p, N, il n'en existe que si $p \geqq 7$; les systèmes p, C existent quel que soit p; les systèmes p, I ne peuvent exister que si $p \geqq 3$; les systèmes p, J que si $p \geqq 9$; les systèmes $p\Omega$ existent quel que soit p; les systèmes p, R ne peuvent exister que si $p \geqq 5$. Cela posé, à un système O, la loi d'orthogonalité des éléments fait correspondre un système O; à un système p, O correspond un système p, O; à un système 3I, un système Ω; d'une manière plus générale, à un système pI un système $(p-2)\Omega$; à un

système pC, un système p, R. Les Tableaux suivants indiquent les propriétés des systèmes assemblés :

Systèmes assemblés

	Points.	Plans	Droites.
(47)	O	Ω	3I
	2O	1..... Ω Autres... 2Ω	1..... 3I Autres... 4I
	3O	2..... Ω ∞^1..... 2Ω Autres... 3Ω	2..... 3I ∞^1..... 4I Autres... 5I
	p, O	∞^{p-3}..... $p-2$, Ω ∞^{p-2}..... $p-1$, Ω Autres... pΩ	∞^{p-3}..... $p-2$, I ∞^{p-2}..... $p-1$, I Autres... p, I

	Points.	Plans assemblés.	Droites assemblées.
(48)	7N	∞^4..... 5R ∞^5..... 6R Autres... 7R	9J

	Droites.	Points assemblés.	Plans assemblés.
(49)	3I	2..... O ∞^1..... 2O Autres... 3O	5R
	4I	∞^1..... 2O ∞^2..... 3O Autres... 4O	1..... 5R Autres... 6R

	Plans.	Points assemblés.	Droites assemblées.
(50)	5R	7N	∞^2..... 3I ∞^3..... 4I Autres... 5I
	6R	1..... 7N Autres... 8N	∞^3..... 4I ∞^4..... 5I Autres... 6I

	Plans.	Points assemblés.	Droites assemblées.
(51)	Ω	2..... O ∞^1..... 2O Autres... 3O	C
	2Ω	∞^1..... 2O ∞^2..... 3O Autres... 4O	1..... C Autres... 2C
	3Ω	∞^2..... 3O ∞^3..... 4O Autres... 5O	2..... C ∞^1..... 2C Autres... 3C

47. Espace à quatre dimensions. — Dans un espace à quatre dimensions existent les systèmes O, 6N, 2I, C, 8J, Ω, 4R et les systèmes de même nature ayant un indice plus élevé. La loi d'orthogonalité des éléments fait correspondre les systèmes :

$$(52)\quad \begin{cases} \mathrm{O},\ 2\mathrm{I} & \text{et} \quad p,\ \mathrm{O};\ p+1,\ \mathrm{I} \\ 6\mathrm{N},\ \mathrm{C} & \text{et} \quad p+5,\ \mathrm{N},\ p,\ \mathrm{C} \\ \Omega,\ 4\mathrm{R} & \text{et} \quad p\Omega,\ p+3,\ \mathrm{R} \end{cases}$$

Pour les systèmes assemblés on a les propriétés :

	Points.	Droites assemblées.	Plans assemblés.
(53)	O	1 ..... 2I Autres... 3I	Ω
	2O	2 ..... 2I x^1 ..... 3I Autres... 4I	1 ..... Ω Autres... 2Ω
	3O	x^1 ..... 3I x^2 ..... 4I Autres... 5I	2 ..... Ω x^1 ..... 2Ω Autres... 3Ω

	Droites.	Points assemblés.	Plans assemblés.
(54)	2I	1 ..... O Autres... 2O	4R
	3I	2 ..... O x^1 ..... 2O Autres... 3O	1 ..... 4R Autres... 5R
	4I	x^1 ..... 2O x^2 ..... 3O Autres... 4O	2 ..... 4R x^1 ..... 5R Autres... 6R

	Plans.	Points assemblés.	Droites assemblées.
(55)	Ω	x^1 ..... O x^2 ..... 2O Autres... 3O	C
	2Ω	x^2 ..... 2O x^3 ..... 3O Autres... 4O	1 ..... C Autres... 2C
	2Ω	x^3 ..... 3O x^4 ..... 4O Autres... 5O	2 ..... C x^1 ..... 2C Autres... 3C

(56)

Plans.	Droites assemblées.	Points assemblés.
4R	∞^1..... 2I ∞^2..... 3I Autres... 4I	6N
5R	∞^2..... 3I ∞^3..... 4I Autres... 5I	1..... 6N Autres... 7N
6R	∞^3..... 4I ∞^4..... 5I Autres... 6I	2..... 6N ∞^1..... 7N Autres... 8N

48. Espace à cinq dimensions. — Dans l'espace à cinq dimensions existent les systèmes O, 5N, I, C, 7J, Ω, 3R et ceux de même nature qui ont un coefficient plus élevé. La loi d'orthogonalité relie les systèmes suivants :

$$(57)\qquad \begin{cases} p, \mathrm{I} & \text{et} \quad p, \mathrm{I}, \\ p, \mathrm{C} & \text{et} \quad p+6, \mathrm{J}, \\ p, \mathrm{O} & \text{et} \quad p+2, \mathrm{R}, \\ p, \Omega & \text{et} \quad p+4, \mathrm{N}. \end{cases}$$

Pour les systèmes assemblés, on a les propriétés :

(58)

Points.	Droites assemblées.	Plans assemblés.
O	2..... I ∞^1..... 2I Autres... 3I	Ω
2O	∞^1..... 2I ∞^2..... 3I Autres... 4I	1..... Ω Autres... 2Ω
5N	7J	∞^2..... 3R ∞^3..... 4R Autres... 5N

(59)

Plans.	Droites assemblées.	Points assemblés.
3R	2..... I ∞^1..... 2I Autres... 3I	5N
4R	∞^1..... 2I ∞^2..... 3I Autres... 4I	1..... 5N Autres... 6N
Ω	C	∞^2..... O ∞^3..... 2O Autres... 3O

	Droites.	Points assemblés.		Plans assemblés.	
(60)	I	O		3R	
	2I	1.....	O	1.....	3R
		Autres...	2O	Autres...	4R
	3I	2.....	O	2.....	3R
		∞^1.....	2O	∞^1.....	4R
		Autres...	3O	Autres...	5R

49. Espace à six dimensions. — Dans l'espace à six dimensions existent les systèmes O, 4N, I, C, 6J, Ω, 2R et ceux de même nature qui ont un coefficient plus élevé. La loi d'orthogonalité des éléments relie les systèmes suivants :

$$(61)\qquad \begin{cases} p, \mathrm{O} & \text{et} \quad p+3, \mathrm{N}, \\ p, \mathrm{I} & \text{et} \quad p+1, \mathrm{R} \\ p, \Omega & \text{et} \quad p+5, \mathrm{J}. \end{cases}$$

Enfin, pour les systèmes assemblés, on a :

	Points.	Droites assemblées.		Plans assemblés.	
(62)	O	∞^1.....	I		
		∞^2.....	2I	Ω	
		Autres...	3I		
	2O	∞^2.....	2I	1.....	Ω
		∞^3.....	3I	Autres...	2Ω
		Autres...	4I		
	4N	6J		∞^1.....	2R
				∞^2.....	3R
				Autres...	4R
	5N	1.....	6J	∞^2.....	3R
		Autres...	7J	∞^3.....	4R
				Autres...	5R

	Droites.	Points assemblés.		Plans assemblés.	
(63)	I	O		1.....	2R
				Autres...	3R
	2I	1.....	O	2.....	2R
		Autres...	2O	∞^1.....	3R
				Autres...	4R
	3I	2.....	O	∞^1.....	3R
		∞^1.....	2O	∞^2.....	4R
		Autres...	3O	Autres...	5R

	Plans.	Points assemblés.	Droites assemblées.
(64)	2R	4N	1 ..... I Autres... 2I
	3R	1 ..... 4N Autres... 5N	2 ..... I ∞^1 ..... 2I Autres... 3I
	4R	2 ..... 4N ∞^1 ..... 5N Autres... 6N	∞^1 ..... 2I ∞^2 ..... 3I Autres... 4I

CHAPITRE VII.

INDICATION DE DIVERS TYPES DE PROBLÈMES.

50. But de ce Chapitre. — Le but de ce Chapitre est de montrer comment les théories qui précèdent permettent de trouver de *nouveaux systèmes triple-orthogonaux*. Pour cela nous chercherons les systèmes (points, plans ou droites) qui possèdent deux propriétés, par exemple les systèmes points qui sont p, O et q, O; ou bien p, O et q, N; les systèmes droites qui sont p, C et q, I; les systèmes plans qui sont p, R et q, Ω, etc.

Tous ces problèmes se ramènent à la recherche des systèmes O associés que nous allons définir.

51. Systèmes O associés. — Deux systèmes O décrits par les points M $(x_1, \ldots, x_n)$ et N $(y_1, \ldots, y_m)$ sont dits *associés* lorsque les équations de Laplace auxquelles satisfont les coordonnées x de M sont les mêmes que celles auxquelles satisfont les coordonnées y de N. Il en résulte que si

$$(1) \qquad \Sigma\, dx^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2,$$

$$(2) \qquad \Sigma\, dy^2 = h_1'^2\, du_1^2 + h_2'^2\, du_2^2 + h_3'^2\, du_3^2,$$

on devra avoir

$$(3) \qquad h'_1 = h_1 U_1, \qquad h'_2 = h_2 U_2, \qquad h'_3 = h_3 U_3,$$

U_1, U_2, U_3 étant respectivement des fonctions de u_1 seul, de u_2 seul et de u_3 seul.

Il est clair que, dans l'espace à $n + m$ dimensions, le point P qui a pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ décrit un système O, ce qui revient à dire que le système M est à la fois O et $(m+1)$ O; donc :

Un système O *associé à un système* O *de l'espace à m dimensions est un système* O, $(m+1)$ O *et inversement.*

Il est clair d'après cela qu'il ne peut pas exister de sys-

tèmes O, 3O; les plus simples systèmes sont ceux qui sont O, 4O.

Une ou plusieurs des fonctions U_1, U_2, U_3 peuvent se réduire à des constantes; supposons qu'une seule d'entre elles, U_1 par exemple, soit constante; par une homothétie on peut réduire cette constante à l'unité; on aura alors

$$(4) \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 = 0.$$

Par conséquent, le point Q qui a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n, iy_1, iy_2, \ldots, iy_m$ décrit un système qui est en général un système (1, 0, 0). Il peut se présenter des singularités d'ordre plus élevé, par exemple si l'on avait

$$(5) \qquad \begin{cases} \sum\left(\frac{\partial^k x}{\partial u_1^k}\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial^k y}{\partial u_1^k}\right)^2 = 0 & (k = 1, 2, \ldots, p), \\ \sum\left(\frac{\partial^{p+1} x}{\partial u_1^{p+1}}\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial^{p+1} y}{\partial u_1^{p+1}}\right)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Le point Q décrirait un système $(p, 0, 0)$. Nous savons que cela n'est possible que si (n° 43)

$$n + m \geq 2p + 3.$$

Supposons maintenant que des fonctions U_1 et U_2, par exemple, se réduisent à des constantes; si ces deux constantes sont distinctes, il n'y a rien à ajouter à ce qui vient d'être dit, sinon que l'*association est singulière* de deux manières; c'est-à-dire que le système M appartient aux deux types $(p, 0, 0)$ et $(0, q, 0)$.

Si les deux constantes sont égales on pourra les réduire toutes deux à l'unité, de sorte qu'on aura, outre l'équation 4, l'équation

$$(6) \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 = 0.$$

Par conséquent, le point Q décrit en général un système (1, 1, 0) ce qui exige (n° 43) que $n + m \geq 7$; s'il y a des singularités d'ordre plus élevé, Q pourrait être du type $(p, q, 0)$; pour cela il faut que

$$n + m \geq 2(p + q) + 3.$$

Enfin les trois fonctions U_1, U_2, U_3 peuvent se réduire à des constantes; si ces constantes sont distinctes il n'y a rien à ajouter à ce qui précède. Dans le cas où elles sont toutes

égales, on peut les réduire à l'unité, et l'on voit que le point Q décrit en général un système (1, 1, 1), ce qui exige $n + m \geqq 9$. Dans ce cas on dit aussi que les systèmes O, N et M sont *applicables*.

52. Système O, 4O, espace à trois. — Soit $M(x_1, x_2, x_3)$ un point qui décrit un système O, 4O; ce système est associé à celui décrit par un point $M'(y_1, y_2, y_3)$ et l'on a

$$(7)\quad \begin{cases} \Sigma\, dx^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2, \\ \Sigma\, dy^2 = h_1^2\, U_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, U_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, U_3^2\, du_2^2. \end{cases}$$

Le point M étant 4O, il y a ∞^1 droites D assemblées qui sont 4I, ces droites D sont en même temps 3I, puisqu'elles sont assemblées à un point O. Inversement on peut passer des systèmes 3I, 4I aux systèmes O, 4O.

Partons de la droite D qui est 4I, il y a ∞^1 points 2O qui lui sont assemblés; d'autre part, la droite D étant 3I, ces systèmes points assemblés sont 3O; ainsi à tout système 3I, 4I on peut faire correspondre des systèmes 2O, 3O. Inversement, à chaque système 3O sont assemblées 2 droites 3I; si de plus le système point est 2O, la droite assemblée sera 4I; il y a donc équivalence entre la recherche des systèmes 2O, 3O et celle des systèmes 3I, 4I.

On voit de même qu'il y a équivalence entre la recherche des systèmes O, 4O et celle des systèmes Ω, 2Ω.

Nous pouvons donc donner le Tableau suivant des problèmes équivalents à la recherche des systèmes O, 4O :

O, 4O; 3I, 4I; Ω, 2Ω; 2O, 3O.

Le passage d'un système à un autre permet de déduire d'une solution du problème de nouvelles solutions; on a donc les *transformations suivantes:*

(α)	passage de	O, 4O	à	3I, 4I,
(β)	»	O, 4O	à	Ω, 2Ω,
(γ)	»	2O, 3O	à	3I, 4I,
(δ)	»	2O, 3O	à	Ω, 2Ω.

Cas particulier. — On peut supposer qu'une ou plusieurs des fonctions U_1, U_2, U_3 se réduisent à des constantes; ici, si deux fonctions se réduisent à des constantes, ces constantes sont nécessairement (n° 50) différentes. On a donc les

cas particuliers suivants :

1° $U_1 = \alpha$,

2° $U_1 = \alpha$, $U_2 = \beta$, $\alpha \neq \beta$,

3° $U_1 = \alpha$, $U_2 = \beta$, $U_3 = \gamma$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

J'ai étudié ce dernier cas dans mon Mémoire *Sur une classe particulière de systèmes triple-orthogonaux* (*Comptes rendus*, 1er semestre 1903).

53. Systèmes O, 4O, espace à quatre. — Soit

$$M(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

un point qui décrit un système O, 4O; ce système est associé à un système $M'(y_1, y_2, y_3)$ de l'espace à trois; il en résulte que M′ décrit un système O, 5O.

Plaçons-nous d'abord dans l'espace à quatre; au système O, 4O la loi d'orthogonalité des éléments fait correspondre un système 2I, 5I. Comme dans le cas de l'espace à trois, on passe des systèmes O, 4O, aux systèmes 3I, 4I; puis aux systèmes 2O, 3O; on peut aussi passer de O, 4O à Ω, 2Ω; à ces derniers systèmes correspondent, par orthogonalité des éléments, les systèmes 4R, 5R. On a donc les systèmes équivalents suivants :

Espace à quatre,

O, 4O; 2I, 5I; 2O, 3O; 3I, 4I; Ω, 2Ω; 4R, 5R.

Plaçons-nous maintenant dans l'espace à trois dimensions; le point M′ décrit un système O, 5O; on peut en déduire un système 3I, 5I; on peut aussi en déduire un système Ω, 3Ω; de ces deux derniers on peut déduire un système 3O, 3O; de Ω, 3Ω on déduit des systèmes C, C qui correspondent par orthogonalité des éléments à des systèmes 5R, 5R. On a donc les systèmes équivalents suivants :

Espace à trois,

O, 5O; 3O, 3O; 3I, 5I; Ω, 3Ω; 5R, 5R; C, C;

d'où l'on déduit facilement toutes les transformations que comporte le problème.

Cas particuliers. — 1° Une des fonctions U_1, U_2, U_3 (U_1 par exemple) se réduit à une constante, qu'on peut supposer

égale à l'unité; alors :

$$(8)\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2.$$

Nous supposons de plus que

$$(9)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right)\neq\sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}\right)^2.$$

2° On a, à la fois,

$$(10)\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2,\quad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}\right)^2.$$

3° Deux des fonctions U_1 et U_2 se réduisent à des constantes distinctes α et β; par conséquent

$$(11)\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2=\alpha^2\sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2,\quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2=\beta^2\sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2.$$

Nous supposons de plus que l'on a

$$(12)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right)^2\neq\alpha^2\sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}\right)^2,\quad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}\right)^2\neq\beta^2\sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2}\right)^2.$$

4° Les égalités (11) étant satisfaites, une seule des inégalités (12) se change en égalité.

5° Les égalités (11) étant satisfaites, les deux inégalités (12) se changent en égalités.

6° Les deux fonctions U_1 et U_2 se réduisent à des constantes égales; on peut supposer ces constantes égales à l'unité, de sorte que l'on aura

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2,\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2.$$

7° Dans tous les cas précédents on a supposé U_3 non constant; on en obtiendra de nouveaux en faisant U_3 constant; il faut remarquer toutefois qu'on ne peut pas avoir

$$U_1=U_2=U_3.$$

54. Systèmes O, 4O, espace à cinq. — Soit $M(x_1, \ldots, x_5)$ un point qui décrit un système O, 4O; ce système est associé à un système $M'(y_1, y_2, y_3)$ de l'espace à trois, de sorte que M' décrit un système O, 6O.

Plaçons-nous d'abord dans l'espace à cinq dimensions. Au système O, 4O correspond par orthogonalité un système 3R,

6R; de l'un ou l'autre de ces systèmes on déduit des systèmes I, 6I ou 3I, 4I; de ces derniers on déduit des systèmes 2O, 3O ou encore 4R, 5R; de l'un ou l'autre de ces deux derniers on déduit des 2I, 5I.

Enfin de O, 4O on déduit des Ω, 2Ω qui correspondent à des 5N, 5N; on a donc les systèmes équivalents suivants :

Espace à cinq,

O, 4O; 2O, 3O; 3R, 6R; 4R, 5R; I, 6I;
2I, 5I; 3I, 4I; Ω, 2Ω; 5N, 5N.

Nous pouvons en déduire des éléments de l'espace à quatre. En effet, soit $D(X_1, X_2, \ldots, X_5)$ une droite qui est 2I, 5I; on peut supposer, puisque la droite D est 2I,

$$\Sigma X^2 = 1. \tag{13}$$

La droite étant 5I, il y aura quatre coordonnées complémentaires Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 telles que

$$\Sigma Y^2 = 1. \tag{14}$$

Il en résulte que la droite $\Delta(Y_1, \ldots, Y_4)$ décrit dans l'espace à quatre un système 2I, 6I; les coordonnées complémentaires pour 6I étant $X_1, \ldots, X_5$. De ces systèmes 2I, 6I on en déduit d'autres et l'on forme ainsi le Tableau suivant des systèmes équivalents dans l'espace à quatre :

Espace à quatre,

O, 5O; 2O, 4O; 3O, 3O; 2I, 6I; 3I, 5I; 4I, 4I;
Ω, 3Ω; 2Ω, 2Ω; 4R, 6R; 5R, 5R; C, C; 6N, 6N.

Le point M′ décrit dans l'espace à trois un système O, 6O; on en déduit d'autres systèmes et l'on forme ainsi le Tableau des systèmes équivalents dans l'espace à trois dimensions :

Espace à trois,

O, 6O; 2O, 5O; 3O, 4O; Ω, 4Ω,
2Ω, 3Ω; 5R, 6R; 3I, 6I; 4I, 5I.

Ces trois Tableaux indiquent les diverses transformations que comporte le problème.

Cas particuliers. — Les cas particuliers sont les mêmes que dans le cas de l'espace à quatre dimensions.

55. Systèmes O, 4O, espace à six. — Soit $M(x_1, \ldots, x_6)$ un point qui décrit un système O, 4O dans l'espace à six; ce système est associé à un système $M'(y_1, y_2, y_3)$; de sorte que M′ est O, 7O.

Plaçons-nous d'abord dans l'espace à six; les systèmes O, 4O correspondent par orthogonalité aux systèmes 4N, 7N; des systèmes O, 4O on déduit les systèmes I, 6I puis 3I, 4I; de ces derniers on déduit des 2O, 3O; puis des 2I, 5I; en tenant compte, en outre, de la loi d'orthogonalité des éléments, on forme le Tableau suivant qui contient les systèmes équivalents aux systèmes O, 4O :

Espace à six,

O, 4O; 2O, 3O; 4N, 7N; 5N, 6N; I, 6I; 2I, 5I;
3I, 4I; 2R, 7R; 3R, 6R; 4R, 5R; Ω, 2Ω; 6J, 7J.

Ce Tableau permet d'introduire des éléments de l'espace à cinq; ainsi aux systèmes I, 6I de l'espace à six, correspond immédiatement un système I, 7I dans l'espace à cinq; on en déduit les autres éléments et l'on forme le Tableau suivant :

Espace à cinq,

I, 7I; 3I, 5I; O, 5O; 3O, 3O; 3R, 7R;
5R, 5R; Ω, 3Ω; C, C; 7J, 7J.

Dans l'un et l'autre de ces Tableaux on peut tirer des éléments de l'espace à quatre; ainsi aux 2I, 5I de l'espace à six correspondent les 2I, 7I de l'espace à quatre; aux O, 5O de l'espace à cinq les O, 6O de l'espace à quatre. On en déduit les autres éléments équivalents et l'on a le Tableau suivant :

Espace à quatre,

O, 6O; 2O, 5O; 3O, 4O; 2I, 7I; 3I, 6I; 4I, 5I;
Ω, 4Ω; 2Ω, 3Ω; 4R, 7R; 5R, 6R; C, 2C; 6N, 7N.

Enfin des systèmes O, 7O, espace à trois, on déduit le Tableau suivant :

Espace à trois,

O, 7O; 3O, 5O; 3I, 7I; 5I, 5I; Ω, 5Ω;
3Ω, 3Ω; C, 3C; 5R, 7R; 7N, 7N.

Ces quatre Tableaux mettent en évidence les diverses transformations du problème.

Cas particuliers. — En dehors des cas particuliers signalés dans le cas de l'espace à quatre il y a lieu de signaler les suivants :

1° Si U_1 se réduit à l'unité, on peut avoir, outre les équations

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2, \qquad \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}\right)^2,$$

l'équation

$$\sum\left(\frac{\partial^3 x}{\partial u_1^3}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial^3 y}{\partial u_1^3}\right)^2,$$

c'est-à-dire que le système M appartient aussi au type (3, 0, 0).

2° U_1, U_2, U_3 peuvent se réduire à des constantes égales; en ramenant ces constantes à l'unité on voit que les systèmes M et M′ sont applicables. Nous étudierons ce système dans le dernier Chapitre de ce Mémoire.

56. Remarques. — Si l'on veut traiter analytiquement chacun des problèmes que nous venons d'indiquer on trouve toujours un nombre d'équations supérieur au nombre des fonctions inconnues. Il faut donc appliquer les méthodes de M. Riquier pour reconnaître s'il existe des solutions et pour savoir dans ce cas le degré de généralité du problème. Il nous est impossible de traiter tous les problèmes indiqués, je me bornerai à dire que *tous les types signalés existent;* je traiterai seulement deux de ces problèmes : 1° les systèmes O, 4O dans l'espace à trois dimensions; 2° les systèmes O de l'espace à six applicables sur un système O de l'espace à trois.

CHAPITRE VIII.

LES SYSTÈMES O, $\mathcal{A}$O DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

57. Calcul des β_{ik}. Degré de généralité du problème. — Soit $M(x_1, x_2, x_3)$ un système O associé à un système $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$; nous emploierons pour le système M les notations du n° **24** et pour les éléments correspondants du système M' les mêmes lettres accentuées; de sorte qu'on a déjà

$$(1) \qquad h'_1 = h_1 U_1, \qquad h'_2 = h_2 U_2, \qquad h'_3 = h_3 U_3.$$

Les formules

$$\beta_{ki} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial u_k}$$

donnent

$$(2) \qquad \beta'_{ki} = \frac{U_i}{U_k} \beta_{ki}.$$

On a donc les valeurs suivantes des β'_{ki} :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \beta'_{12} = \beta_{12} \dfrac{U_2}{U_1}, & \beta'_{23} = \beta_{23} \dfrac{U_3}{U_2}, & \beta'_{31} = \beta_{31} \dfrac{U_1}{U_3}, \\ \beta'_{13} = \beta_{13} \dfrac{U_3}{U_1}, & \beta'_{21} = \beta_{21} \dfrac{U_1}{U_2}, & \beta'_{32} = \beta_{32} \dfrac{U_2}{U_3}. \end{array} \right.$$

Les quantités β_{ik} satisfont aux équations

$$(3) \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk},$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} = 0, \\ \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12} \beta_{13} = 0, \\ \dfrac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23} \beta_{21} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on écrit que les β'_{ik} satisfont aux équations (3) on n'obtient rien de nouveau ; il reste à exprimer qu'ils satisfont aux équations (4). L'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial \beta'_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta'_{21}}{\partial u_2} + \beta'_{31}\beta'_{32} = 0$$

donne

$$\frac{U_2}{U_1}\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} - \frac{U_2 U'_1}{U_1^2}\beta_{12} + \frac{U_1}{U_2}\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} - \frac{U_1 U'_2}{U_2^2}\beta_{21} + \frac{U_1 U_2}{U_3^2}\beta_{31}\beta_{32} = 0$$

ou bien

$$\frac{U_3^2}{U_1^2}\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} - \frac{U_3^2 U'_1}{U_1^3}\beta_{12} + \frac{U_3^2}{U_2^2}\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} - \frac{U_3^2 U'_2}{U_2^3}\beta_{21} + \beta_{31}\beta_{32} = 0.$$

Retranchons de cette équation la première des équations (4) et divisons ensuite par U_3^2, on aura

$$\left(\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_3^2}\right)\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} - \frac{U'_1}{U_1^3}\beta_{12} + \left(\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_3^2}\right)\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} - \frac{U'_2}{U_2^3}\beta_{21} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_3^2}}\,\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_3^2}}\,\beta_{12}\right)$$
$$+\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_3^2}}\,\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_3^2}}\,\beta_{21}\right) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_3^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_3^2}}}\beta_{12}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_3^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_3^2}}}\beta_{21}\right) = 0,$$

ce qui conduit à poser

$$\beta_{12} = \frac{\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_3^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_3^2}}}\frac{\partial F_3}{\partial u_2}, \qquad \beta_{21} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_3^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_3^2}}}\frac{\partial F_3}{\partial u_1}.$$

On verrait de même que l'on peut poser

$$\beta_{23} = \frac{\sqrt{\frac{1}{U_3^2} - \frac{1}{U_1^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_1^2}}} \frac{\partial F_1}{\partial u_3}, \qquad \beta_{32} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{U_2^2} - \frac{1}{U_1^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_3^2} - \frac{1}{U_2^2}}} \frac{\partial F_1}{\partial u_2},$$

$$\beta_{31} = \frac{\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_2^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_3^2} - \frac{1}{U_2^2}}} \frac{\partial F_2}{\partial u_1}, \qquad \beta_{13} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{U_3^2} - \frac{1}{U_2^2}}}{\sqrt{\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_2^2}}} \frac{\partial F_2}{\partial u_3}.$$

Nous transformerons ces formules en posant

$$(6) \qquad \frac{1}{U_1^2} = \mathcal{V}_1^2 + \lambda, \qquad \frac{1}{U_2^2} = \mathcal{V}_2^2 + \lambda, \qquad \frac{1}{U_3^2} = \mathcal{V}_3^2 + \lambda,$$

λ étant une constante; on aura alors

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_{23} &= \frac{\sqrt{\mathcal{V}_3^2 - \mathcal{V}_1^2}}{\sqrt{\mathcal{V}_2^2 - \mathcal{V}_1^2}} \frac{\partial F_1}{\partial u_3}, & \beta_{32} &= -\frac{\sqrt{\mathcal{V}_2^2 - \mathcal{V}_1^2}}{\sqrt{\mathcal{V}_3^2 - \mathcal{V}_1^2}} \frac{\partial F_1}{\partial u_2}, \\ \beta_{31} &= \frac{\sqrt{\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2}}{\sqrt{\mathcal{V}_3^2 - \mathcal{V}_2^2}} \frac{\partial F_2}{\partial u_1}, & \beta_{13} &= -\frac{\sqrt{\mathcal{V}_3^2 - \mathcal{V}_2^2}}{\sqrt{\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_2^2}} \frac{\partial F_2}{\partial u_3}, \\ \beta_{12} &= \frac{\sqrt{\mathcal{V}_2^2 - \mathcal{V}_3^2}}{\sqrt{\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_3^2}} \frac{\partial F_3}{\partial u_2}, & \beta_{21} &= -\frac{\sqrt{\mathcal{V}_1^2 - \mathcal{V}_3^2}}{\sqrt{\mathcal{V}_2^2 - \mathcal{V}_3^2}} \frac{\partial F_3}{\partial u_1}. \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons que les valeurs choisies pour les racines carrées soient telles que

$$(8) \qquad \sqrt{\mathcal{V}_k^2 - \mathcal{V}_l^2} = i\sqrt{\mathcal{V}_l^2 - \mathcal{V}_k^2} \qquad (\text{si } k > l).$$

Cela posé, si les valeurs des β_{ik} fournies par les formules (7) satisfont aux équations (3) et (4), elles satisferont aussi à l'équation (5) et aux équations analogues. Il reste donc à écrire que les équations (3) et (4) sont vérifiées. Parmi ces équations considérons, en particulier, les suivantes :

$$\frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\beta_{13},$$

$$\frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31}\beta_{12},$$

$$\frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12}\beta_{13} = 0;$$

on trouve que la fonction F_1 doit satisfaire aux équations

suivantes :

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\,\partial u_2} = i\frac{\partial F_2}{\partial u_1}\frac{\partial F_3}{\partial u_2} + \mho_1\mho_1'\left(\frac{1}{\mho_2^2-\mho_1^2} - \frac{1}{\mho_3^2-\mho_1^2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\,\partial u_3} = i\frac{\partial F_3}{\partial u_1}\frac{\partial F_2}{\partial u_3} + \mho_1\mho_1'\left(\frac{1}{\mho_3^2-\mho_1^2} - \frac{1}{\mho_2^2-\mho_1^2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial u_3},$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\,\partial u_3} = i\frac{\partial F_3}{\partial u_2}\frac{\partial F_2}{\partial u_3} + \mho_2\mho_2'\left(\frac{1}{\mho_2^2-\mho_1^2} - \frac{1}{\mho_2^2-\mho_3^2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial u_3}$$
$$+\mho_3\mho_3'\left(\frac{1}{\mho_3^2-\mho_1^2} - \frac{1}{\mho_3^2-\mho_2^2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial u_2};$$

on voit que, si l'on pose pour abréger

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \mho_1\mho_1'\left(\frac{1}{\mho_1^2-\mho_2^2} - \frac{1}{\mho_1^2-\mho_3^2}\right),\\ B &= \mho_2\mho_2'\left(\frac{1}{\mho_2^2-\mho_3^2} - \frac{1}{\mho_2^2-\mho_1^2}\right),\\ C &= \mho_3\mho_3'\left(\frac{1}{\mho_3^2-\mho_1^2} - \frac{1}{\mho_3^2-\mho_2^2}\right),\end{aligned}\right.$$

les fonctions F_1, F_2, F_3 doivent satisfaire aux neuf équations

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\,\partial u_2} &= i\frac{\partial F_2}{\partial u_3}\frac{\partial F_3}{\partial u_2} - A\frac{\partial F_1}{\partial u_2},\\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1\,\partial u_3} &= i\frac{\partial F_3}{\partial u_1}\frac{\partial F_2}{\partial u_3} + A\frac{\partial F_1}{\partial u_3},\\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2\,\partial u_3} &= i\frac{\partial F_2}{\partial u_3}\frac{\partial F_3}{\partial u_2} + C\frac{\partial F_1}{\partial u_2} - B\frac{\partial F_1}{\partial u_3};\\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial u_2\,\partial u_3} &= i\frac{\partial F_3}{\partial u_2}\frac{\partial F_1}{\partial u_3} - B\frac{\partial F_2}{\partial u_3},\\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial u_2\,\partial u_1} &= i\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial F_3}{\partial u_1} + B\frac{\partial F_2}{\partial u_1},\\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial u_3\,\partial u_1} &= i\frac{\partial F_3}{\partial u_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_3} + A\frac{\partial F_2}{\partial u_3} - C\frac{\partial F_2}{\partial u_1};\\
\frac{\partial^2 F_3}{\partial u_3\,\partial u_1} &= i\frac{\partial F_1}{\partial u_3}\frac{\partial F_2}{\partial u_1} - C\frac{\partial F_3}{\partial u_1},\\
\frac{\partial^2 F_3}{\partial u_3\,\partial u_2} &= i\frac{\partial F_2}{\partial u_3}\frac{\partial F_1}{\partial u_2} + C\frac{\partial F_3}{\partial u_2},\\
\frac{\partial^2 F_3}{\partial u_1\,\partial u_2} &= i\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial F_2}{\partial u_1} + B\frac{\partial F_3}{\partial u_1} - A\frac{\partial F_3}{\partial u_2}.
\end{aligned}\right.$$

On peut à l'aide de ces équations former de trois manières

différentes les dérivées $\frac{\partial^3 F_i}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3}$ et exprimer ces dérivées à l'aide des dérivées du premier ordre. On vérifie, sans peine, que les trois expressions obtenues pour $\frac{\partial^3 F_i}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3}$ sont identiques. Il en résulte que, pour une valeur initiale quelconque des variables (par exemple $u_1 = u_2 = u_3 = 0$), on pourra se donner arbitrairement les valeurs des fonctions inconnues F_1, F_2, F_3 et celles de leurs dérivées d'ordre quelconque prises par rapport à une seule variable : les équations (10) et celles qui s'en déduisent par différentiation permettent de calculer ensuite les valeurs initiales de toutes les autres dérivées, et l'on arrivera à la même valeur quelle que soit la façon de faire le calcul. Il en résulte que la solution la plus générale du système (10) comporte *neuf fonctions arbitraires d'une seule variable.*

Il faut remarquer en outre que si l'on a une solution quelconque du système (10) on peut en déduire une autre en ajoutant à F_1 une fonction arbitraire de u_1, à F_2 une fonction arbitraire de u_2, à F_3 une fonction arbitraire de u_3. L'introduction de ces fonctions ne modifie pas les valeurs de β_{ik} données par les formules (7); donc :

La recherche de la représentation sphérique des système O, 4O, *c'est-à-dire le calcul des* β_{ik}, *est un problème dont la solution générale contient six fonctions arbitraires d'une variable.*

58. Propriétés diverses. — Dans les formules (6) on peut donner à la constante λ une valeur arbitraire; donc :

Un système O, 4O *est associé à une infinité de systèmes* O.

Supposons que l'une des variables, u_3 par exemple, reste fixe, et cherchons la nature du réseau décrit par M. Pour ce réseau on a (les notations sont celles de mon Mémoire *Sur les systèmes cycliques et orthogonaux*, p. 120)

$$a = \beta_{31}, \qquad m = \beta_{21},$$
$$b = \beta_{32}, \qquad n = \beta_{12};$$

par conséquent

$$m = -\frac{\sqrt{U_1^2 - U_3^2}}{\sqrt{U_2^2 - U_3^2}} \frac{\partial F_3}{\partial u_1}, \qquad n = \frac{\sqrt{U_2^2 - U_3^2}}{\sqrt{U_1^2 - U_3^2}} \frac{\partial F_3}{\partial u_2};$$

donc, le réseau décrit par M est associé à un réseau plan; les

systèmes triples ainsi obtenus sont composés de surfaces qui prises individuellement sont des surfaces O, 3O.

Enfin, on vérifie facilement que, pour deux systèmes associés M et M′, les rayons de courbure des surfaces correspondantes sont les mêmes.

59. Recherche des systèmes associés. — Après avoir étudié (n° 57) tout ce qui concerne la représentation sphérique, nous allons passer à la recherche des systèmes associés; soit M′ l'un quelconque des associés de M; aux systèmes M et M′ correspondent les déterminants orthogonaux Δ et Δ'

$$(11)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} \xi_1'^1 & \xi_1'^2 & \xi_1'^3 \\ \xi_2'^1 & \xi_2'^2 & \xi_2'^3 \\ \xi_3'^1 & \xi_3'^2 & \xi_3'^3 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, à un système M qui correspond au déterminant Δ on peut de deux manières faire correspondre un système qui appartient à Δ'.

1° Si h_1, h_2, h_3 sont les fonctions de Lamé du premier système, on prendra pour le second h'_1, h'_2, h'_3 :

$$(12)\qquad h'_1 = h_1 U_1, \qquad h'_2 = h_2 U_2, \qquad h'_3 = h_3 U_3,$$

c'est le moyen d'obtenir des systèmes associés ;

2° Si p_1, p_2, p_3 sont les distances d'un point fixe aux plans focaux de M, on pourra prendre, pour obtenir un système N′ du déterminant Δ',

$$(13)\qquad p'_1 = \frac{1}{U_1} p_1, \qquad p'_2 = \frac{1}{U_2} p_2, \qquad p'_3 = \frac{1}{U_3} p_3.$$

Ces quantités p' satisfont bien aux équations

$$(14)\qquad \frac{\partial p'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik} p'_k.$$

Il faut remarquer que les systèmes décrits par M et N′ ne sont pas associés en général. En effet, désignons par h_1, h_2, h_3 les fonctions de Lamé pour le système M, par h'_1, h'_2, h'_3 celles du système N′; on aura [équations (22), (n° 24)]

$$(15)\qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial p_1}{\partial u_1} + \beta_{21} p_2 + \beta_{31} p_3, \\ h'_1 = \dfrac{\partial p'_1}{\partial u_1} + \beta'_{21} p'_2 + \beta'_{31} p'_3; \end{cases}$$

d'où

$$(16)\qquad h'_1 = \frac{1}{U_1}\frac{\partial p_1}{\partial u_1} - \frac{U'_1}{U_1^2}p_1 + \beta_{21}\frac{U_1}{U_2^2}p_2 + \beta_{31}\frac{U_1}{U_3^2}p_3.$$

Le système N′ est associé à un système N, pour lequel les fonctions de Lamé ont les valeurs $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$:

$$(17)\qquad \mathfrak{H}_1 = \frac{1}{U_1}\mathfrak{H}'_1,\qquad \mathfrak{H}_2 = \frac{1}{U_2}\mathfrak{H}'_2,\qquad \mathfrak{H}_3 = \frac{1}{U_3}\mathfrak{H}'_3,$$

donc

$$(18)\qquad \mathfrak{H}_1 = \frac{1}{U_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial u_1} - \frac{U'_1}{U_1^2}p_1 + \beta_{21}\frac{1}{U_2^2}p_2 + \beta_{31}\frac{1}{U_3^2}p_3,$$

ou bien, en tenant compte des formules (6),

$$(19)\qquad \mathfrak{H}_1 = \lambda\mathfrak{H}_1 + U_1^2\frac{\partial p_1}{\partial u_1} + U_1U'_1p_1 + \beta_{21}U_2^2p_2 + \beta_{31}U_3^2p_3.$$

On voit qu'en général les systèmes M et N′ ne sont pas associés; mais il résulte de là que, de chaque système M dont la représentation sphérique est Δ, on peut déduire une infinité de systèmes analogues.

On en déduit aussi que, si l'on connaît des quantités p_1, p_2, p_3 satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_k} = \rho_{ik}p_k,$$

on peut en déduire des fonctions de Lamé, H_1, H_2, H_3, par les formules

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} H_1 &= U_1^2\frac{\partial p_1}{\partial u_1} + U_1U'_1p_1 + \beta_{21}U_2^2p_2 + \beta_{31}U_3^2p_3,\\ H_2 &= U_2^2\frac{\partial p_2}{\partial u_2} + U_2U'_2p_2 + \beta_{32}U_3^2p_3 + \beta_{12}U_1^2p_1,\\ H_3 &= U_3^2\frac{\partial p_3}{\partial u_3} + U_3U'_3p_3 + \beta_{13}U_1^2p_1 + \beta_{23}U_2^2p_2.\end{aligned}\right.$$

60. Transformation du problème. — Considérons deux systèmes O associés M et M′; à tout plan assemblé à l'un on peut faire correspondre un plan assemblé à l'autre, puisque les équations de Laplace auxquelles satisfont les coordonnées M et M′ sont les mêmes. Coupons, en particulier, le système M par un plan isotrope fixe; on y fera correspondre dans le

système M′ un plan P′ qui décrit un système Ω, 2Ω; le symétrique N′ du point M′, par rapport au plan P′, décrira aussi un système O, 4O; nous avons ainsi une première transformation du problème qui est formée par le passage des systèmes O, 4O aux systèmes Ω, 2Ω.

On peut en indiquer une deuxième, par le passage des systèmes O, 4O aux systèmes 3I, 4I. Cette deuxième transformation n'est pas distincte de la précédente, parce que les systèmes 3I, 4I correspondent par orthogonalité des éléments aux systèmes Ω, 2Ω. Ainsi, la droite M′N′ décrit un système 3I, 4I.

Des systèmes 3I, 4I ou Ω, 2Ω on pourra passer aux systèmes 2O, 3O et inversement, ce qui donne une autre transformation du problème.

Pour suivre analytiquement cette transformation il faut former les paramètres des droites qui décrivent des systèmes 3I, 4I. On y arrive facilement de la façon suivante : supposons que l'on prenne pour p_1, p_2, p_3 une combinaison linéaire isotrope des quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3, par exemple

$$(21)\qquad p_1 = \xi_1^1 + i\xi_1^2, \qquad p_2 = \xi_2^1 + i\xi_2^2, \qquad p_3 = \xi_3^1 + i\xi_3^2;$$

h_1 sera nul, par conséquent, quel que soit λ, $\mathfrak{E}_1$ conservera la même valeur; c'est-à-dire que tous les points N′ (n° 59) décrivent des systèmes associés. Désignons d'autre part par ρ la distance de N′ à l'origine O. On a

$$\rho^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 = \frac{1}{U_1^2} p_1^2 + \frac{1}{U_2^2} p_2^2 + \frac{1}{U_3^2} p_3^2,$$

ou bien en tenant compte des formules (6)

$$(22)\qquad \rho^2 = \lambda(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U_1^2 p_1^2 + U_2^2 p_2^2 + U_3^2 p_3^2,$$

Mais ici, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ est nul; donc pour tous les points N′ la distance ON′ est la même.

Soient alors $N'(x'_1, x'_2, x'_3)$ et $N''(x''_1, x''_2, x''_3)$ deux de ces points; la droite D, qui a pour paramètres directeurs x'_1, x'_2, x'_3, décrit un système 3I, 4I; les coordonnées complémentaires pour être 3I sont

$$\frac{i}{2}(\Sigma x'^2 + 1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\Sigma x'^2 - 1),$$

et pour être 4I

$$ix''_1, \quad ix''_2, \quad ix''_3$$

Le passage des systèmes O, 4O aux systèmes 3I, 4I revient à prendre la figure inverse du système décrit par N'.

On voit que l'on peut suivre indéfiniment la transformation quand on connaît tous les déterminants Δ, Δ', ...

On peut aussi suivre analytiquement le passage des 2O, 3O aux 2I, 4I.

CHAPITRE IX.

LES SYSTÈMES O DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS APPLICABLES SUR DES SYSTÈMES DE L'ESPACE A SIX DIMENSIONS.

61. Réduction du problème à la recherche de deux systèmes opposés dans l'espace ordinaire. — Soient M et M′ deux points situés, l'un M dans l'espace à trois dimensions, l'autre M′ dans l'espace à six, qui décrivent des systèmes O applicables; les fonctions de Lamé, h_1, h_2, h_3 étant les mêmes pour les deux systèmes, les quantités β_{ik} auront aussi la même valeur; et par conséquent des équations (24) et (31), Chap. V, on déduit

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0, \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(2)\qquad \theta = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

on aura, en tenant compte des formules (31), Chapitre V,

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_2} = 2\beta_{21}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = 0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_3} = 2\beta_{31}(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) = 0,$$

par conséquent θ est une fonction de u_1 seul; en choisissant convenablement la variable u_1, on peut réduire cette fonction à l'unité; on voit de même que par un choix convenable des variables u_2 et u_3 on peut supposer

$$(3)\qquad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

Il en résulte que si l'on pose

$$(4)\qquad a_i = \xi_1'^i, \qquad b_i = \xi_2'^i, \qquad c_i = \xi_3'^i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

le déterminant

$$(5)\qquad \Delta' = \begin{vmatrix} \xi_1'^1 & \xi_1'^2 & \xi_1'^3 \\ \xi_2'^1 & \xi_2'^2 & \xi_2'^3 \\ \xi_3'^1 & \xi_3'^2 & \xi_3'^3 \end{vmatrix}$$

est un déterminant O; on a ici

$$\frac{\partial \xi'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik}\xi'_k = \beta_{ki}\xi'_k.$$

Le déterminant Δ' diffère du déterminant Δ [formule (20), Chap. V] en ce sens que les β_{ki} de l'un sont égaux aux β_{ik} de l'autre; nous dirons que ces deux déterminants O sont *opposés*. On voit que le problème posé revient à la recherche des déterminants O opposés.

62. Déterminants O opposés. Degré de généralité du problème. — Soient Δ et Δ' deux déterminants O

$$(6)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} \xi'^1_1 & \xi'^2_1 & \xi'^3_1 \\ \xi'^1_2 & \xi'^2_2 & \xi'^3_2 \\ \xi'^1_3 & \xi'^2_3 & \xi'^3_3 \end{vmatrix},$$

tels qu'entre les rotations β_{ik} du premier et les rotations β'_{ik} du second existent les relations

$$(7)\qquad \beta'_{ik} = \beta_{ki}.$$

Les quantités β_{ik} doivent déjà satisfaire aux équations

$$(8)\qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \qquad (i \neq k \neq l),$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} = 0, \\ \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12}\beta_{13} = 0, \\ \dfrac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23}\beta_{21} = 0. \end{cases}$$

Il faut écrire que les quantités β'_{ik} satisfont à des équations analogues; les équations (8) ne donnent rien de nouveau; les équations (9) imposent les nouvelles conditions suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} + \beta_{13}\beta_{23} = 0. \\ \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_2} + \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_3} + \beta_{21}\beta_{31} = 0, \\ \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_3} + \dfrac{\partial \beta_{31}}{\partial u_1} + \beta_{32}\beta_{12} = 0. \end{cases}$$

En résumé, il s'agit de déterminer les six fonctions β_{ik} de façon à satisfaire aux douze équations (8), (9) et (10). Pour discuter ce système, nous partageons ces équations en deux groupes : dans le premier, nous mettrons toutes les équations qui contiennent une dérivée par rapport à u_3; dans le second nous mettrons les autres; de sorte que nos deux groupes sont les suivants :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_3} &= \beta_{13}\beta_{32},\\
\frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_3} &= \beta_{23}\beta_{31},\\
\frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_3} &= -\frac{\partial\beta_{32}}{\partial u_2} - \beta_{21}\beta_{31},\\
\frac{\partial\beta_{32}}{\partial u_3} &= -\frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_2} - \beta_{12}\beta_{13},\\
\frac{\partial\beta_{31}}{\partial u_3} &= -\frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_1} - \beta_{23}\beta_{21},\\
\frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_3} &= -\frac{\partial\beta_{31}}{\partial u_1} - \beta_{32}\beta_{12}.
\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\partial\beta_{32}}{\partial u_1} - \beta_{31}\beta_{12} = 0, & A_2 &= \frac{\partial\beta_{23}}{\partial u_1} - \beta_{21}\beta_{13} = 0\\
B_1 &= \frac{\partial\beta_{13}}{\partial u_2} - \beta_{12}\beta_{23} = 0, & B_2 &= \frac{\partial\beta_{31}}{\partial u_2} - \beta_{32}\beta_{21} = 0,\\
C_1 &= \frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} = 0, & C_2 &= \frac{\partial\beta_{12}}{\partial u_2} + \frac{\partial\beta_{21}}{\partial u_1} + \beta_{13}\beta_{23} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, nous déterminerons six fonctions a, b, a_1, b_1, m, n de u_1 et u_2 par les équations suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial u_2} &= bm, & \frac{\partial a_1}{\partial u_2} &= b_1 n,\\
\frac{\partial b}{\partial u_1} &= an, & \frac{\partial b_1}{\partial u_1} &= a_1 m,\\
\frac{\partial m}{\partial u_2} + \frac{\partial n}{\partial u_1} + ab &= 0, & \frac{\partial m}{\partial u_1} + \frac{\partial n}{\partial u_2} + a_1 b_1 &= 0.
\end{aligned}\right.$$

La solution générale de ce système renfermera *six fonctions arbitraires d'une seule variable.*

D'après le théorème de Cauchy, le système (11) admet une solution telle que pour $u_3 = 0$ on ait

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\beta_{31} &= a, & \beta_{13} &= a_1, & \beta_{21} &= m,\\
\beta_{32} &= b, & \beta_{23} &= b_1, & \beta_{12} &= n.
\end{aligned}\right.$$

Les β_{ik} ainsi déterminés satisfont naturellement aux équations (11); je vais montrer que les équations (12) sont aussi satisfaites: d'abord pour $u_3 = 0$ les quantités désignées par A_i, B_i, C_i sont nulles à cause du choix des valeurs initiales des β_{ik}. Ensuite, si l'on prend une solution quelconque du système (11) et que l'on forme les valeurs correspondantes des fonctions A_i, B_i, C_i, on voit que les dérivées de ces fonctions, par rapport à u_3, s'expriment linéairement à l'aide des fonctions A_i, B_i, C_i et de leurs dérivées prises par rapport à u_1 et à u_2. Il en résulte que les fonctions A_i, B_i, C_i qui sont nulles pour $u_3 = 0$ sont nulles quelle que soit la valeur de u_3.

On voit que la solution générale du problème contient *six fonctions arbitraires d'une variable.*

63. Propriétés des systèmes opposés. — Soient M un point qui décrit un système O correspondant au déterminant Δ; M′ un point qui correspond au déterminant Δ'; à cause de la relation

$$\beta'_{ik} = \beta_{ki},$$

les fonctions p_1, p_2, p_3 du premier système satisfont aux mêmes équations que les fonctions de Lamé h'_1, h'_2, h'_3 du second et inversement. Il en résulte qu'à chaque système M, on peut faire correspondre un système M′ dans lequel les distances d'un point fixe (p'_1, p'_2, p'_3) aux plans focaux de M′ sont égales aux fonctions de Lamé du système M. On aura donc [équation (22), n° **26**]

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} p'_1 &= \frac{\partial p_1}{\partial u_1} + \beta_{21} p_2 + \beta_{31} p_3,\\ p'_2 &= \frac{\partial p_2}{\partial u_2} + \beta_{32} p_3 + \beta_{12} p_1,\\ p'_3 &= \frac{\partial p_3}{\partial u_3} + \beta_{13} p_1 + \beta_{23} p_2. \end{aligned}\right.$$

De même au système M′ on peut faire correspondre un système N, appartenant au déterminant Δ; les distances (P_1, P_2, P_3) d'un point fixe aux plans focaux de N seront données par les formules

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial p'_1}{\partial u_1} + \beta_{12} p'_2 + \beta_{13} p'_3,\\ P_2 &= \frac{\partial p'_2}{\partial u_2} + \beta_{23} p'_3 + \beta_{21} p'_1,\\ P_3 &= \frac{\partial p'_3}{\partial u_3} + \beta_{31} p'_1 + \beta_{32} p'_2. \end{aligned}\right.$$

Les formules (15) et (16) mettent en évidence le résultat suivant :

La recherche des systèmes O *appartenant au déterminant* Δ *et celle des système* O *appartenant au déterminant* Δ' *sont deux problèmes équivalents.*

Des formules (15) et (16) on peut déduire P_1, P_2, P_3 en fonction de p_1, p_2, p_3; en général, P_1, P_2, P_3 sont distincts de p_1, p_2, p_3, donc :

Quand on connaît un système O *appartenant au déterminant* Δ *on peut en déduire une infinité de systèmes analogues.*

64. Systèmes triple-orthogonaux pour lesquels la somme des carrés des fonctions de Lamé est nulle. — Considérons, d'une manière générale, un système point (qui n'est pas nécessairement un système O) pour lequel la somme des carrés des fonctions h_1, h_2, h_3 (n° 3) est nulle. On a donc

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 0. \tag{17}$$

Différentions l'équation (17) par rapport à u_1; on aura, en tenant compte des équations (5), n° 3,

$$\frac{\partial h_1}{\partial u_1} + \beta_{12} h_2 + \beta_{13} h_3 = 0; \tag{18}$$

on trouverait des équations analogues en différentiant l'équation (17) par rapport à u_2 ou u_3. Il en résulte que les fonctions h_1, h_2, h_3 satisfont aux *neuf équations* suivantes

$$\frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} h_k \qquad (k \neq i), \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} &= -\beta_{12} h_2 - \beta_{13} h_3, \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_2} &= -\beta_{23} h_3 - \beta_{21} h_1, \\ \frac{\partial h_3}{\partial u_3} &= -\beta_{31} h_1 - \beta_{32} h_2. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

En écrivant que les équations (19) et (20) sont compatibles, on trouve que les β_{ik} doivent satisfaire aux équations (10); par conséquent, si l'on pose

$$\beta'_{ik} = \beta_{ki}, \tag{21}$$

les quantités β'_{ik} seront les rotations d'un déterminant O; si donc, nous appelons *systèmes opposés* deux systèmes points (non nécessairement O) pour lesquels chaque fonction β_{ik} de l'un est égale à la fonction β_{ki} de l'autre, nous pouvons dire :

Tout système point tel que $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ est opposé à un système O.

Ces systèmes points sont dans la géométrie à trois indéterminées les analogues des systèmes à invariants égaux dans la géométrie à deux indéterminées; à ce titre ils méritent d'être signalés ici.

Cherchons ceux de ces systèmes qui sont O; les β_{ik} du système O devant satisfaire aux équations (10), les systèmes considérés doivent appartenir au déterminant Δ (n° **61**).

Il reste à montrer que, parmi les systèmes qui appartiennent au déterminant Δ, il y en a qui possèdent la propriété indiquée. Pour cela, il suffit de remarquer que les fonctions h de Lamé du déterminant Δ sont les mêmes que les fonctions p' du déterminant Δ'; or, on peut prendre pour p' une combinaison linéaire isotrope des ξ' du déterminant Δ'; par exemple

$$h_1 = p'_1 = \xi'^1_1 + i\xi'^2_1,$$
$$h_2 = p'_2 = \xi'^1_2 + i\xi'^2_2,$$
$$h_3 = p'_3 = \xi'^1_3 + i\xi'^2_3.$$

On aura bien alors

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 0.$$

Cette propriété se conserve quand on fait une inversion, le centre d'inversion étant quelconque; il en résulte une *transformation du problème.*

Ces systèmes O que nous venons d'étudier sont dans la géométrie à trois indéterminées les analogues des *systèmes isothermes* dans la géométrie à deux indéterminées.

65. Problèmes équivalents dans les espaces d'ordre 3, 4, 5, 6. — Partons des deux déterminants O opposés Δ et Δ' (n° **61**); on pourra former un déterminant O de l'espace à six, pour lequel les β_{ik} sont les mêmes que ceux de Δ, les autres rotations (n° **24**) ayant les valeurs suivantes :

$$(22)\quad \begin{cases} a_1 = \mu\xi'^1_1, & a_2 = \mu\xi'^2_1, & a_3 = \mu\xi'^3_1, \\ b_1 = \mu\xi'^1_2, & b_2 = \mu\xi'^2_2, & b_3 = \mu\xi'^3_2, \\ c_1 = \mu\xi'^1_3, & c_2 = \mu\xi'^2_3, & c_3 = \mu\xi'^3_3, \end{cases}$$

μ étant une constante quelconque; soit D ce déterminant; à chaque système O appartenant à Δ correspond un système O applicable appartenant à D; comme on peut faire varier la constante μ on a le résultat suivant :

Si un système O de l'espace à trois dimensions est applicable sur un système de l'espace à six, il sera applicable sur une infinité de pareils systèmes.

Ces systèmes O de l'espace à six applicables sur l'espace à trois sont des systèmes O, 4N; ils correspondent par orthogonalité des éléments à des systèmes analogues; ce sont ceux que l'on formerait avec le déterminant Δ'.

A chaque système O, 4N sont assemblées ∞^1 droites qui sont I, 6J, auxquelles correspondent, par orthogonalité des éléments, des plans 2R, Ω. On passe inversement de ces systèmes aux O, 4O. On a donc les systèmes équivalents suivants :

Espace à six,

$$0, 4N, \qquad I, 6J, \qquad \Omega, 2R.$$

Soient $D(X_1, \ldots, X_6)$ une droite qui décrit un système I, 6J; $Y_1, \ldots, Y_5$ les paramètres complémentaires pour être 6J, on a

$$0 = \Sigma X^2 = -\Sigma Y^2,$$
$$\Sigma dX^2 = -\Sigma dY^2.$$

Il en résulte que la droite Δ qui a pour paramètres $Y_1, \ldots, Y_5$ décrit dans l'espace à cinq un système I, 7J; comme une droite I se correspond à elle-même par orthogonalité des éléments, on voit que le système décrit par Δ est I, 7J et C. En coupant Δ par un plan isotrope, on obtient dans l'espace à trois les systèmes O pour lesquels $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 0$.

Des systèmes I, 7J on déduit les systèmes 0, 5N; puis 3R, Ω; on a donc dans l'espace à cinq les systèmes :

Espace à cinq,

$$I, 7J, \qquad O, 5N, \qquad \Omega, 3R.$$

Les systèmes O, 5N sont des systèmes O de l'espace à cinq applicables sur un système de l'espace à quatre. Ces derniers sont des systèmes O, 6N; il y correspond par orthogonalité des éléments des systèmes 2I, C; on en déduit des systèmes Ω, 4R. On a donc le tableau d'éléments suivants :

Espace à quatre,

$$O, 6N, \qquad 2I, C, \qquad \Omega, 4R.$$

Enfin les systèmes O de l'espace à trois applicables sur des systèmes de l'espace à six sont des systèmes O, 7N; on en déduit des Ω, 5R; puis par orthogonalité des éléments des 3I, C. On a donc les éléments suivants :

Espace à trois,

$$\text{O, 7N,} \qquad \Omega\text{, 5R,} \qquad \text{3I, C.}$$

Les différents tableaux que nous venons de donner indiquent d'abord des problèmes équivalents, mais ils montrent surtout les diverses transformations dont le problème est susceptible.

Parmi ces systèmes, considérons en particulier les 3I, C espace à trois; soient $D(X_1, X_2, X_3)$ la droite qui décrit le système; Y_1 et Y_2 les coordonnées complémentaires.

Les quantités X et Y satisfont aux équations (8), n° 5 et l'on a

$$\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 = 0,$$
$$\Sigma X^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2,$$

(en choisissant convenablement les variables u_1, u_2, u_3).

Cela posé le point $M(x_1, x_2, x_3)$, défini par

$$x_i = \frac{X_i}{\rho}, \qquad \rho = Y_1 \pm i Y_2,$$

décrit un système O et, si h_1, h_2, h_3 sont les fonctions de Lamé correspondantes, on aura

$$\Sigma x^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

On aurait pu former directement ces systèmes en partant des déterminants Δ et Δ′ (n° 61).

66. Systèmes de Ribeaucour. Calcul des β_{ik}. — Dans un Mémoire *Sur la théorie des surfaces courbes* (*Journal de Mathématiques*, 1892) Ribeaucour a cherché les systèmes triples tels que toutes les surfaces d'une même famille aient même représentation sphérique de leurs lignes de courbure; il montre que le problème revient à mettre le ds^2 de la sphère sous la forme suivante :

$$(23) \qquad ds^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv^2.$$

Depuis M. Petot et M. Lucien Lévy ont étudié les surfaces

qui, par un mouvement de translation, engendrent un système triple. Il est clair que les systèmes ainsi formés rentrent dans le type de Ribeaucour; mais ce qu'il y a d'important dans ces travaux, c'est de montrer qu'inversement, si l'on prend un système de Ribeaucour, il existe un système ayant même représentation sphérique qui est engendré par la translation d'une surface.

Ces systèmes de Ribeaucour forment une classe particulière de ceux étudiés dans ce Chapitre; ils correspondent au cas où les déterminants opposés Δ et Δ' sont identiques; on est donc ramené à la recherche des déterminants O de l'espace à trois pour lesquels on a

$$\beta_{ik} = \beta_{ki}. \tag{24}$$

Posons alors

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1 &= \beta_{23} = \beta_{32}, \\ \theta_2 &= \beta_{31} = \beta_{13}, \\ \theta_3 &= \beta_{12} = \beta_{21}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Les équations (23) et (24), Chapitre V, donnent

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u_1} = \theta_2\theta_3, \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial u_2} = \theta_3\theta_1, \qquad \frac{\partial\theta_3}{\partial u_3} = \theta_1\theta_2, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\theta_1}{\partial u_2} + \frac{\partial\theta_1}{\partial u_3} + \theta_2\theta_3 = 0, \\ &\frac{\partial\theta_2}{\partial u_3} + \frac{\partial\theta_2}{\partial u_1} + \theta_3\theta_1 = 0, \\ &\frac{\partial\theta_3}{\partial u_1} + \frac{\partial\theta_3}{\partial u_2} + \theta_1\theta_2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

De ces équations, on déduit facilement que chacune des fonctions θ_1, θ_2, θ_3 est une solution de l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_1} + \frac{\partial\theta}{\partial u_2} + \frac{\partial\theta}{\partial u_3} = 0, \tag{28}$$

dont la solution la plus générale est

$$\theta = F(u, v), \tag{29}$$

où u et v ont les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} u &= u_1 - u_3, \\ v &= u_2 - u_3. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

En introduisant ces variables, les six équations (26) et (27) se réduisent aux trois suivantes :

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} = \theta_2\theta_3, \qquad \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} = \theta_1\theta_3, \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} + \theta_1\theta_2 = 0. \end{cases}$$

On voit que si l'on pose

$$a = \theta_1, \qquad b = \theta_2, \qquad m = n = \theta_3,$$

on a

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial u} = an \end{cases} \qquad \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} + ab = 0.$$

Par conséquent le problème revient à chercher les réseaux de la sphère pour lesquels $m = n$; le ds^2 de la sphère est

$$ds^2 = a^2\,du^2 + b^2\,dv^2$$

et, comme

$$a\frac{\partial a}{\partial v} = b\frac{\partial b}{\partial u} = abm,$$

on a bien la forme de Ribeaucour.

Si l'on prend maintenant les trois équations auxquelles satisfont les trois fonctions ξ_1, savoir

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial u_2} = \beta_{12}\xi_2, \qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial u_3} = \beta_{13}\xi_3, \qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial u_1} = -\beta_{21}\xi_2 - \beta_{31}\xi_3,$$

on aura, puisque $\beta_{ik} = \beta_{ki}$,

$$(33)\qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial u_1} + \frac{\partial\xi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial\xi_1}{\partial u_3} = 0,$$

donc les trois quantités ξ_1 sont des fonctions de u et de v; il en est de même des fonctions ξ_2 et ξ_3, par conséquent dans le déterminant

$$(34)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix}$$

tous les éléments ne dépendent que des deux variables u et v.

67. Propriétés des systèmes de Ribeaucour. — Considérons un point M qui décrit un système de Ribeaucour,

c'est-à-dire un système O, appartenant au déterminant Δ que nous venons de définir; considérons deux surfaces appartenant à une même famille, par exemple les surfaces $u_3 = \alpha$ et $u_3 = \beta$; sur ces deux surfaces faisons correspondre les points A et B pour lesquels les différences $u_1 - u_3$ et $u_2 - u_3$ ont la même valeur, c'est-à-dire que, si le point A correspond au système de valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \alpha,$$

le point B correspondra au système

$$u_1 - \alpha + \beta, \quad u_2 - \alpha + \beta, \quad \beta,$$

en ces deux points u et v et par conséquent les éléments du déterminant Δ ont la même valeur; les surfaces décrites par A et B ont leurs lignes de courbure parallèles; c'est la propriété prise comme point de départ par Ribeaucour.

Maintenant, comme ici, $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, les équations auxquelles satisfont les quantités p_1, p_2, p_3 sont les mêmes que celles auxquelles satisfont les fonctions de Lamé h_1, h_2, h_3.

Il en résulte qu'à tout système $M(p_1, p_2, p_3)$ de Ribeaucour, on peut en faire correspondre un autre $N(P_1, P_2, P_3)$ appartenant au même déterminant Δ, où

$$(35) \quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{\partial p_1}{\partial u_1} + \beta_{21} p_2 + \beta_{31} p_3, \\ P_2 = \dfrac{\partial p_2}{\partial u_2} + \beta_{32} p_3 + \beta_{12} p_1, \\ P_3 = \dfrac{\partial p_3}{\partial u_3} + \beta_{13} p_1 + \beta_{23} p_2. \end{cases}$$

Il en résulte que, si l'on connaît un système M appartenant au déterminant Δ, on peut, en général, en déduire une infinité d'autres. Étudions la transformation définie par les formules (35).

Tout d'abord il peut se faire que les fonctions P_1, P_2, P_3 soient toutes nulles; dans ce cas la transformation ne donne rien; cela arrive seulement dans le cas où p_1 est une fonction linéaire des ξ_1; p_2 la même fonction linéaire des ξ_2, enfin p_3 la même fonction linéaire des ξ_3; c'est-à-dire si l'on a

$$(36) \quad \begin{cases} p_1 = a\xi_1^1 + b\xi_1^2 + c\xi_1^3, \\ p_2 = a\xi_2^1 + b\xi_2^2 + c\xi_2^3, \\ p_3 = a\xi_3^1 + b\xi_3^2 + c\xi_3^3, \end{cases}$$

a, b, c étant des constantes.

Il peut se faire que P_1, P_2, P_3 soient proportionnels à p_1, p_2, p_3, c'est-à-dire que

$$(37) \qquad P_1 = \alpha p_1, \qquad P_2 = \alpha p_2, \qquad P_3 = \alpha p_3;$$

dans ce cas les systèmes décrits par M et N sont homothétiques; si l'on écrit ces conditions, on trouve pour p_1, p_2, p_3 neuf équations, d'abord les trois équations (35), puis les six équations

$$(38) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} p_k.$$

On vérifie que ces neuf équations forment un système complet, par conséquent leur solution générale renferme trois constantes arbitraires.

Si l'on prend pour p_1, p_2, p_3 les valeurs ainsi trouvées, on obtient des systèmes $M(x_1, x_2, x_3)$ tels que

$$(39) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{\alpha^2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2).$$

Cette propriété se conserve si l'on fait une inversion ayant pour pôle l'origine; on a ainsi une méthode qui permet de déduire de chaque déterminant Δ de Ribeaucour un déterminant analogue; *c'est une transformation du problème de Ribeaucour*.

On pourrait de même chercher les cas où la transformation définie par les formules (35) reproduit à un même facteur près les fonctions p_1, p_2, p_3 au bout de 2, 3, ..., n opérations. Tous ces cas existent.

68. Systèmes triples engendrés par la translation d'une surface. — Puisque $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ on peut prendre les valeurs suivantes des fonctions de Lamé :

$$(40) \qquad h_1 = \xi_1^1, \qquad h_2 = \xi_2^1, \qquad h_3 = \xi_3^1.$$

Si l'on considère les surfaces décrites par les points A et B qui ont été définies (n° 66), on voit que ces surfaces sont égales puisque h_1 et h_2 ont les mêmes valeurs en ces deux points. On voit facilement que l'on passe de A à B par une translation parallèle à l'axe des x_1. On obtient ainsi tous les systèmes triples engendrés par la translation d'une surface.

Si l'on prend maintenant les valeurs suivantes de h_1, h_2, h_3

$$(41) \qquad h_1 = \xi_1^1 + i\xi_1^2, \qquad h_2 = \xi_2^1 + i\xi_2^2, \qquad h_3 = \xi_3^1 + i\xi_3^2,$$

on formera un système triple, qui peut être engendré par la translation isotrope d'une surface. Pour un tel système on a

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 0. \tag{42}$$

C'est un cas particulier des surfaces étudiées au n° 63.

Note. — Les systèmes triples de Ribeaucour ont été signalés d'abord par M. Darboux dans sa Thèse : *Mémoire sur les systèmes orthogonaux*. Depuis ils ont été étudiés par M. Fouché : *Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales où les surfaces d'une même famille admettent la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure* (*Comptes rendus*, 1898, 1er semestre) et par M. Egorow : *Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Comberousse* (*Comptes rendus*, 1900, 2e semestre).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION..... 3

CHAPITRE I.

SYSTÈMES POINTS, SYSTÈMES DROITES, SYSTÈMES PLANS.

1. Systèmes points..... 5
2. Paramètres normaux..... 5
3. Détermination du système point..... 7
4. Systèmes points parallèles..... 8
5. Systèmes plans. Systèmes droites..... 8

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS FOCALES.

6. Propriétés des tangentes à un système point..... 10
7. Transformation de Laplace..... 11
8. Propriété de la transformation de Laplace..... 13
9. Éléments focaux d'un système point..... 14
10. Éléments focaux d'un système droite..... 14
11. Éléments focaux d'un système plan..... 14
12. Loi de parallélisme des éléments..... 15

CHAPITRE III.

SYSTÈMES ASSEMBLÉS.

13. Systèmes points et droites assemblés..... 16
14. Systèmes points et plans assemblés..... 16
15. Systèmes droites et plans assemblés..... 17
16. Propriétés focales des systèmes assemblés..... 18
17. Loi de parallélisme pour les éléments assemblés..... 18

CHAPITRE IV.

LOI D'ORTHOGONALITÉ DES ÉLÉMENTS.

18. Indications générales..... 19

Pages.
19. Espaces d'ordre $3p$ 19
20. Espaces d'ordre $3p+1$ 23
21. Espaces d'ordre $3p+2$ 25

CHAPITRE V.

SYSTÈMES POINTS O.

22. Systèmes points rectangulaires. Systèmes O 27
23. Déterminants O 28
24. Systèmes O dans l'espace à trois dimensions 32
25. Espaces d'ordre 4, 5, 6 34
26. Passage d'un espace à l'espace d'ordre supérieur 36
27. Droites normales à un système O 37
28. Systèmes plans normaux à un système O 38
29. Systèmes points normaux à un système O 40

CHAPITRE VI.

SYSTÈMES QUI SE RATTACHENT AUX SYSTÈMES O.

30. Systèmes p, O 43
31. Systèmes N, pN 43
32. Systèmes droites I, pI 44
33. Systèmes droites C, pC 44
34. Systèmes droites J, pJ 45
35. Systèmes plans Ω, pΩ 45
36. Systèmes plans R, pR 45
37. Passage des systèmes O aux systèmes I 46
38. Passage des systèmes O aux systèmes Ω 47
39. Passage des systèmes N aux systèmes J 48
40. Passage des systèmes N aux systèmes R 50
41. Passage des systèmes R aux systèmes I 51
42. Passage des systèmes C aux systèmes Ω 51
43. Étude générale des singularités 52
44. Propriété des systèmes singuliers 54
45. Remarques 56
46. Espace à trois dimensions 56
47. Espace à quatre dimensions 58
48. Espace à cinq dimensions 59
49. Espace à six dimensions 60

CHAPITRE VII.

INDICATION DE DIVERS TYPES DE PROBLÈMES.

50. But de ce Chapitre 62
51. Systèmes O associés 62
52. Systèmes O, 4O, espace à trois 64
53. Systèmes O, 4O, espace à quatre 65
54. Systèmes O, 4O, espace à cinq 66
55. Systèmes O, 4O, espace à six 68
56. Remarques 69

CHAPITRE VIII.

LES SYSTÈMES O, 4O DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

Pages.

57. Calcul des β_{ik}. Degré de généralité du problème..... 70
58. Propriétés diverses..... 74
59. Recherches des systèmes associées..... 75
60. Transformation du problème..... 76

CHAPITRE IX.

LES SYSTÈMES O DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS APPLICABLES SUR DES SYSTÈMES DE L'ESPACE A SIX DIMENSIONS.

61. Réduction du problème à la recherche de deux systèmes opposés dans l'espace ordinaire..... 79
62. Déterminants O opposés. Degré de généralité du problème... 80
63. Propriétés des systèmes opposés..... 82
64. Systèmes triple orthogonaux pour lesquels la somme des carrés des fonctions de Lamé est nulle..... 83
65. Problèmes équivalents dans les espaces d'ordre 3, 4, 5, 6..... 84
66. Systèmes de Ribeaucour. Calcul des β_{ik}..... 86
67. Propriétés des systèmes de Ribeaucour..... 88
68. Systèmes triples engendrés par la translation d'une surface... 90

TABLE DES MATIÈRES..... 93

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

36519 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

SCIENTIA

Exposé et Développement des questions scientifiques à l'ordre du jour

RECUEIL PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE

MM. APPELL, D'ARSONVAL, HALLER, LIPPMANN, MOISSAN, POINCARÉ, POTIER, Membres de l'Institut,

Pour la Partie Physico-Mathématique

ET DE

MM. D'ARSONVAL, FOUQUÉ, GAUDRY, GUIGNARD, MAREY, Membres de l'Institut; HENNEGUY, Professeur au Collège de France,

Pour la Partie Biologique

Chaque fascicule comprend de 80 à 100 pages in-8° écu, avec cartonnage spécial.

Prix du fascicule..... 2 francs

A côté des revues périodiques spéciales, enregistrant au jour le jour le progrès de la Science, il nous a semblé qu'il y avait place pour une nouvelle forme de publication, destinée à mettre en évidence, par un exposé philosophique et documenté des découvertes récentes, les idées générales directrices et les variations de l'évolution scientifique.

A l'heure actuelle, il n'est plus possible au savant de se spécialiser; il lui faut connaître l'extension graduellement croissante des domaines voisins : mathématiciens et physiciens, chimistes et biologistes ont des intérêts de plus en plus liés.

C'est pour répondre à cette nécessité que, dans une série de monographies, nous nous proposons de mettre

au point les questions particulières, nous efforçant de montrer le rôle actuel et futur de telle ou telle acquisition, l'équilibre qu'elle détruit ou établit, la déviation qu'elle imprime, les horizons qu'elle ouvre, la somme de progrès qu'elle représente.

Mais il importe de traiter les questions, non d'une façon dogmatique, presque toujours faussée par une classification arbitraire, mais dans la forme vivante de la raison qui débat pas à pas le problème, en détache les inconnues et l'inventorie avant et après sa solution, dans l'enchaînement de ses aspects et de ses conséquences. Aussi, indiquant toujours les voies multiples que suggère un fait, scrutant les possibilités logiques qui en dérivent, nous efforcerons-nous de nous tenir dans le cadre de la méthode expérimentale et de la méthode critique.

Nous ferons, du reste, bien saisir l'esprit et la portée de cette nouvelle collection, en insistant sur ce point, que la nécessité d'une publication y sera toujours subordonnée à l'opportunité du sujet.

Série Physico-Mathématique.

(Adresser les Communications à M. Ad. Buhl).

1. Poincaré (H.). *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes.*
2. Maurain (Ch.). *Le magnétisme du fer.*
3. Freundler (P.). *La stéréochimie.*
4. Appell (P.). *Les mouvements de roulement en dynamique.*
5. Cotton (A.). *Le phénomène de Zeemann.*
6. Wallerant (Fr.). *Groupements cristallins; propriétés et optique.*
7. Laurent (H.). *L'élimination.*
8. Raoult (F.-M.). *Tonométrie.*
9. Décombe (L.). *La célérité des ébranlements de l'éther.*
10. Villard (P.). *Les rayons cathodiques.*
11. Barbilion (L.). *Production et emploi des courants alternatifs.*
12. Hadamard (J.). *La série de Taylor et son prolongement analytique.*
13. Raoult (F.-M.). *Cryoscopie.*
14. Macé de Lépinay (J.). *Franges d'interférences et leurs applications métrologiques.*
15. Barbarin (P.). *La géométrie non euclidienne.*

16. Néculcéa (E.). *Le phénomène de Kerr.*
17. Andoyer (H.). *Théorie de la lune.*
18. Lemoine (E.). *Géométrographie.*
19. Carvalho (E.). *L'électricité déduite de l'expérience et ramenée aux principes des travaux virtuels.*
20. Laurent (H.). *Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la géométrie.*
21. Décombe (L.). *La Compressibilité des gaz réels.*
22. Gibbs (J.-W.). *Diagrammes et surfaces thermodynamiques.*
23. Poincaré (H.). *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La télégraphie sans fil.*

Série Biologique.

(Adresser les Communications à M. le Dr Langlois)

1. Bard (L.). *La spécificité cellulaire.*
2. Le Dantec (F.). *La Sexualité.*
3. Frenkel (H.). *Les fonctions rénales.*
4. Bordier (H.). *Les actions moléculaires dans l'organisme.*
5. Arthus (M.). *La coagulation du sang.*
6. Mazé (P.). *Évolation du carbone et de l'azote.*
7. Courtade (D.). *L'irritabilité dans la série animale.*
8. Martel (A.). *Spéléologie.*
9. Bonnier (P.). *L'orientation.*
10. Griffon (Ed.). *L'assimilation chlorophyllienne et la structure des plantes.*
11. Bohn (G.). *L'évolution du pigment.*
12. Costantin (J.). *Hérédité acquise.*
13. Mendelssohn (M.). *Les phénomènes électriques chez les êtres vivants.*
14. Imbert (A.). *Mode de fonctionnement économique de l'organisme.*
15-16. Levaditi (C.). *Le leucocyte et ses granulations.*
17. Anglas (J.). *Les Phénomènes des Métamorphoses internes.*
18. Mouneyrat (Dr A.). *Purine et ses dérivés.*

Série Physico-Mathématique.

No 1. — La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes, par H. Poincaré, de l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Généralités sur les phénomènes électriques.** — Tentatives d'explication mécanique. Phénomènes électrostatiques. Résistance des conducteurs. Induction. Attractions électrodynamiques.

Chap. II. **La théorie de Maxwell.** — Rapports entre la lumière et l'électricité. Courants de déplacement. Nature de la lumière.

Chap. III. **Les oscillations électriques avant Hertz.** — Expériences de Feddersen. Théorie de lord Kelvin. Comparaisons diverses. Amortissement.

Chap. IV. **L'excitateur de Hertz.** — Découverte de Hertz. Principe de l'excitateur. Diverses formes d'excitateurs. Rôle de l'étincelle. Influence de la lumière. Emploi de l'huile. Valeur de la longueur d'onde.

Chap. V. **Moyens d'observation.** — Principe du résonateur. Fonctionnement du résonateur. Divers modes d'emploi de l'étincelle. Procédés thermiques. Procédés mécaniques. Comparaison des divers procédés. Radioconducteurs.

Chap. VI. **Propagation le long d'un fil.** — Production des perturbations dans un fil. Mode de propagation. Vitesse de propagation et diffusion. Expériences de MM. Fizeau et Gonnelle. Diffusion du courant. Expériences de M. Blondlot.

Chap. VII. **Mesure des longueurs d'onde et résonance multiple.** — Ondes stationnaires. Résonance multiple. Autre explication. Expériences de Garbasso et Zehnder. Mesure de l'amortissement. Expériences de Strindberg. Expériences de MM. Pérot et Jones. Expériences de M. Décombe.

Chap. VIII. **Propagation dans l'air.** — L'experimentum crucis. Expériences de Karlsruhe. Expériences de Genève. Emploi du petit excitateur. Nature des radiations.

Chap. IX. **Propagation dans les diélectriques.** — Relation de Maxwell. Méthodes dynamiques. Méthodes statiques. Résultats. Corps conducteurs. Electrolytes.

Chap. X. **Production des vibrations très rapides.** — Ondes très courtes. Excitateur de Righi. Résonateurs. Excitateur de Bose. Récepteur de Bose.

Chap. XI. **Imitation des phénomènes optiques.** — Conditions de l'imitation. Interférences. Lames minces. Ondes secondaires. Diffraction. Polarisation. Polarisation par réflexion. Réfraction. Réflexion totale. Double réfraction.

Chap. XII. **Syntnèse de la lumière.** — Synthèse de la lumière. Autres différences. Explication des ondes secondaires. Remarques diverses.

N° 2. — **Le Magnétisme du Fer,** par Ch. Maurain, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des Sciences physiques, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction. — Définitions.

Chapitre premier. **Phénomènes généraux.** — Courbes d'aimantation. Procédés de mesure. Étude des particularités des courbes d'aimantation. Influence de la forme. Champ démagnétisant. Aimantation permanente.

Chap. II. **Étude particulière du fer, de l'acier et de la fonte.**

Chap. III. **Aimantation et temps.** — Influence des courants induits. Retard dans l'établissement de l'aimantation elle-même. Aimantation anormale. Aimantation par les oscillations électriques.

Chap. IV. **Énergie dissipée dans l'aimantation.** — Influence de la rapidité de variation. Loi de Steinmetz. Variation de la dissipation d'énergie avec la température. Hystérésis dans un champ tournant.

Chap. V. **Influence de la température.**

Chap. VI. **Théorie du Magnétisme.**

N° 3. — **La Stéréochimie,** par P. Freundler, docteur ès sciences, chef de travaux pratiques à la Faculté des sciences de Paris.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Historique.**

Chap. II. **Le carbone trétraédrique.** — Notion du carbone tétraédrique. Principe fondamental. Chaînes ouvertes. Principe de la liaison mobile. Position avantagée. Double liaison et triple liaison. Isomérie éthylénique. Chaînes fermées. Théorie des tensions. Applications diverses de la notion du carbone tétraédrique.

Chap. III. **Le carbone asymétrique.** — Notion du carbone asymétrique. Principes fondamentaux. Chaînes renfermant plusieurs carbones asymétriques. Racémiques et indédoublables. Chaînes fermées. Vérifications expérimentales et applications de la notion du carbone asymétrique. Relations entre la dissymétrie moléculaire et la grandeur du pouvoir rotatoire. Produit d'asymétrie. Relations entre la dissymétrie moléculaire et la dissymétrie cristalline.

Chap. IV. **La stéréochimie de l'azote.** — Représentation schématique de l'atome d'azote. Isomères géométriques de l'azote. L'azote asymétrique.

Stéréochimie des composés du platine et du cobalt.

Chap. V. **Stéréochimie et Tautomérie.**

Bibliographie. Ouvrages classiques. Principaux mémoires.

N° 4. — **Les Mouvements de roulement en dynamique,** par P. Appell, de l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Quelques formules générales relatives au mouvement d'un solide.** — 1. Quelques théorèmes de cinématique. — 2. Formules. — 3. Applications. — 4. Accélération du point. — 5. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. — 6. Cas particuliers. — 7. Mouvement d'un corps solide libre.

Chap. II. **Roulements.** — 8. Roulement et pivotement d'une surface mobile sur une surface fixe. — 9. Conditions physiques déterminant le roulement et le pivotement d'une surface mobile sur une surface fixe. — 10. Force vive d'un corps solide animé d'un mouvement de roulement et pivotement. — 11. Équation du mouvement du corps.

Chap. III. **Applications.** — 12. Applications. — 13. Roulement d'une sphère sur une surface. — 14. Exemples. — 15. Équations du mouvement d'un solide pesant assujetti à rouler et pivoter sur un plan horizontal. — 16. Roulement et pivotement d'un corps pesant de révolution sur un plan horizontal. — 17. Applications. — 18. Recherches de M. Carvallo. — 19. Problème de la bicyclette.

Chap. IV. **Mécanique analytique, équations de Lagrange.** — 20. Le roulement est une liaison qui ne peut pas s'exprimer en général par des équations en termes finis. — 21. Application de l'équation générale de la dynamique. — 22. Emploi des équations de Lagrange. — 23. Impossibilité

d'appliquer directement les équations de Lagrange au nombre minimum des paramètres.

I. Sur les mouvements de roulement.

II. Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales.

N° 5. — Le Phénomène de Zeeman, par A. Cotton, maître de conférences de physique à l'Université de Toulouse.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Étude des raies spectrales.** — 1. Unités. — 2. Réseaux. — 3. Pouvoir séparateur. — 4. Spectroscope à échelons. — 5. Interféromètre. — 6. Appareil de MM. Pérot et Fabry. — 7. Conclusion. Remarque pratique.

Chap. II. **Changements que peuvent subir les raies.** — 1. Changements dans l'aspect des raies. — 2. Constitution des raies. — 3. Changements de longueur d'onde. Effet Döppler-Fizeau. — 4. Déplacements produits par des changements de pression.

Chap. III. **Découverte du changement magnétique des raies.** — 1. Expériences de M. Chautard. — 2. Expériences de Faraday. — 3. Expériences de M. Tait. — 4. Expériences de Fiévez. — 5. Expériences de Zeeman. Intervention de la théorie de Lorentz.

Chap. IV. **Changement des raies d'émission parallèlement aux lignes de force.** — 1. Doublet magnétique. — 2. Polarisation circulaire des raies du doublet. — 3. Règle de MM. Cornu et Kœnig. — 4. Constitution des deux raies du doublet.

Chap. V. **Changements observés perpendiculairement aux lignes de force.** — 1. Polarisation rectiligne des raies modifiées. — 2. Vibrations perpendiculaires aux lignes de force. — 3. Vibrations parallèles aux lignes de force. Premier cas : triplet normal. — 4. Deuxième cas : quadruplet. — 5. Troisième cas : la raie centrale est un triplet. — 6. Conclusion. Note sur un point de théorie.

Chap. VI. **Comparaison des diverses raies.** — 1. Étude qualitative. — 2. Comparaison quantitative. — 3. Règle de M. Preston. — 4. Mesures absolues.

Chap. VII. **Le phénomène de Zeeman et l'absorption.** — 1. Règle de Kirchhoff. — 2. Expériences sur le phénomène de Zeeman, sans spectroscope. — 3. Étude du changement magnétique des raies renversées. — 4. Expériences d'Egowff et Georgiewsky. — 5. Travail de Lorentz.

Chap. VIII. **Propagation de la lumière dans un champ magnétique.** — 1. Le faisceau émergeant à la même longueur d'onde. — 2. Polarisation rotatoire magnétique. — 3. Propagation des vibrations circulaires. — 4. Dispersion rotatoire. — 5. Faisceau incliné sur les lignes de force. — 6. Réflexion sur les miroirs aimantés.

Chap. IX. **Nouvelles expériences se rattachant au phénomène de Zeeman.** — 1. Expérience de M. Righi. — 2. Expériences de MM. Macaluso et Corbino. — 3. Dispersion anormale des vapeurs de sodium (H. Becquerel). — 4. Explication de l'expérience de MM. Macaluso et Corbino.

Chap. X. **Autres expériences.** — 1. Expérience avec le sodium, perpendiculairement au champ. — 2. Expérience de M. Voigt. — 3. Explication de la biréfringence magnétique. — Propriétés de l'hypoazotide, des vapeurs d'iode et de brome.

N° 6. — Groupements cristallins, par Fréd. Wallerant.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Généralités sur la structure des corps cristallisés.** — 1. Problème à résoudre. — 2. Différences entre les corps cristallisés et les corps amorphes. — 3. Symétrie dans les cristaux. — 4. Particule complexe et particule fondamentale. — 5. Réseau. — 6. Structure d'un corps cristallisé. — 7. De la symétrie dans les corps cristallisés. — 8. Relations entre la symétrie de la particule complexe et celle du réseau. Éléments de symétrie limites. — 9. Structures holoédriques et structures mériédriques. Domaine fondamental et domaine complexe.

Chap. II. **Historique.**

Chap. III. **Du rôle des éléments de symétrie de la particule dans la formation des groupements.** — 1. Groupement autour d'un axe de la particule déficient au réseau. — 2. Groupement autour d'un axe d'une particule fondamentale. — 3. Groupement autour d'un axe limite de la particule complexe. — 4. Groupement autour des axes ternaires. — 5. Groupement symétrique par rapport à un plan de symétrie d'une particule fondamentale. — 6. Groupement par rapport à un plan de symétrie limite de la particule complexe. — 7. Groupement par rapport à un centre limite.

Chap. IV. **Classification des groupements.**

Chap. V. **Groupements binaires autour d'un axe ternaire.**

Chap. VI. **Groupements parfaits.** — 1. Groupements terquaternaires. — 2. Groupements sénaires. — 3. Groupements ternaires. — 4. Groupements quaternaires.

Chap. VII. **Groupements imparfaits.** — Cristaux ternaires. Staurotides. Feldspaths.

Chap. VIII. **Groupements obtenus par actions mécaniques.** — Déformation des réseaux. Déformation de la particule complexe.

N° 7. — L'Élimination, par H. Laurent, examinateur à l'École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Élimination entre deux équations.** — Notions préliminaires. Développement d'une fonction rationnelle. Formules de Newton. Définition du résultant. Seconde méthode. Troisième méthode. Quatrième méthode. Cinquième méthode. Sixième méthode. Indications d'autres méthodes. Résolution d'un système à deux inconnues. Solutions multiples. Solutions singulières. Condition pour que trois équations aient une solution commune.

Chap. II. **Élimination dans le cas général.** — Équivalences. Résolution de 3 équations. Théorème de Bezout. Méthode de Bezout. Théorème de Jacobi. Les fonctions symétriques. Nouvelle méthode. Les fonctions interpolaires. Résultante. — Son expression explicite. Étude des propriétés de la résultante. Méthode d'élimination de Labatie et analogues. Équations homogènes. Solutions doubles. Autre exemple de simplifications. Autre exemple. Étude d'une équation remarquable. Discriminants. Propriétés des solutions communes. Reconnaître si un polynôme est réductible. Développement en série. Extension partielle aux équations transcendantes. Appendice.

N° 8. — **Tonométrie,** par F.-M. Raoult, membre correspondant de l'Institut. Doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction : **Symboles et définitions.**

Chapitre premier. **Méthodes d'observation.** — Description spéciale de la *méthode dynamique ou d'ébullition.* — Causes d'erreur, moyen de les éviter. — Ébullioscope de Raoult. — Description de la *méthode statique.* — Tonomètres différentiels de Bremer, de Dieterici. — Méthodes hygrométrique, volumétrique, gravimétrique. — Degré d'approximation.

Chap. II. **Étude des non-électrolytes.** — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la température. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec l'abaissement du point de congélation. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec l'élévation du point d'ébullition. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la concentration. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la nature des corps dissous et des dissolvants. — La diminution de tension de vapeur dans ses rapports avec la densité de vapeur. — Détermination tonométrique des densités de vapeurs saturées.

Chap. III. **Suite des non-électrolytes.** — La loi de Raoult dans ses rapports avec l'élévation du point d'ébullition. — Détermination tonométrique des chaleurs latentes de vaporisation. — Détermination tonométrique des poids moléculaires des non-électrolytes. Emploi de la méthode statique. — Emploi de la méthode dynamique. — Corrections. — Emploi du mercure comme dissolvant (Ramsay).

Chap. IV. **Étude des électrolytes.** — Étude des dissolutions des sels dans l'eau. — Influence de la concentration, — de l'ionisation, — de l'hydratation, — de la température.

Chap. V. **Suite des électrolytes.** — Dissolutions des sels dans l'alcool. — Dissolutions des sels dans l'éther, l'acétone, etc. — État des sels dans leurs dissolutions étendues, dans leurs dissolutions concentrées. — Résultats fournis par la tonométrie pour les poids moléculaires des sels.

Bibliographie.

N° 9. — **La Célérité des ébranlements de l'éther,** par L. Décombe, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **Considérations générales sur l'éther.** — Classification des phénomènes physiques. — Anciens fluides. — Origine commune. — Synthèse des forces physiques. — Conservation de l'énergie. — Nature des forces physiques. — Propagation dans le vide. — Propagation par transparence. — Hypothèse de l'éther.

Chap. II. **Histoire de l'éther.** — *Lumière :* Théorie de l'émission.— Théorie des ondulations. — Principe d'Huygens. — Principe de Young. — Travaux de Fresnel. — Expérience de Foucault. — Périodes de vibrations. *Chaleur :* Théorie de l'émission. Calorique. — Rayons de différentes espèces. — Spectre calorique. — Unité du spectre. — Radiations chimiques. — Analogies optiques. — Nature de la chaleur. — Limites extrêmes du spectre. *Électricité :* Polarisation rotatoire magnétique. Nombre v de Maxwell. — Théorie électromagnétique de la lumière.

Chap. III. **Les oscillations hertziennes.** — Formule de Thomson. — Champs oscillants. — Expériences de Feddersen. — Excitateur. — Excitateur de Hertz. — Excitateur de Lodge. — Excitateur de Blondlot. — Résonateur. — Propagation le long d'un fil. — Transparence électromagnétique. — Réflexion métallique. — Réfraction. — Interférences électromagnétiques. — Interférences dans l'espace. — Interférences le long des fils. — Expériences de Righi. — Polarisation. — Double réfraction. — Télégraphie sans fils. — Radioconducteur de Branly. — Conclusions.

Chap. IV. **La formule de Newton.** — Hypothèses. — Centre de vibration. — Ondes sphériques. — Transversalité des vibrations. — Ondes planes.— Formule de Newton. — Influence du milieu. — Théorie de Fresnel. — Théorie de Neumann et de Mac-Cullagh. — Réfraction. — Dispersion.— Cas des phénomènes électriques. — Pouvoir inducteur spécifique. — Perméabilité magnétique.

Chap. V. **La vitesse de la lumière.** — Essais de Galilée. — Les Académiciens de Florence. — Observations de Rœmer. — Calculs de Delambre. — Aberration. — Méthodes physiques. — Méthodes de la roue Dentée. — Expériences de Fizeau. — Expériences de M. Cornu. — Expériences de Young et Forbes. — Méthode du miroir tournant. — Expériences de Foucault. — Expériences de Fizeau et Breguet. — Expériences de Foucault. — Expériences de Micheson. — Expériences de Newcomb.

Chap. VI. **La vitesse de l'électricité.** — Premiers essais. — Principe du miroir tournant. — Expérience de Wheastone. — Méthode des longitudes. — Expériences de Fizeau et Gounelle. — Expériences de Guillemin et Burnouf. — Expériences de Siemens. — Examen critique des méthodes précédentes.

Chap. VII. **La vitesse de propagation de l'onde électromagnétique.** — Expériences de Blondlot 1893. — Expériences de Blondlot 1891. — Mesures directes. — Difficultés. — Expériences de Duane et de Trowbrige. — Expériences de Saunders. — Conclusion.

Chap. VIII. **La dispersion dans le vide.** — Considérations générales. — Observation des satellites de Jupiter. — Observation des étoiles variables. — Observation de MM. Young et Forbes. — Observation des étoiles orbitales. — Principe de Döppler-Fizeau. — Analyse spectrale. — Remarque de M. Tikhoff. — Conclusion.

Chap. IX. **L'éther de Maxwell.** — Constitution de l'éther. — Théorie de Maxwell. — Tourbillons moléculaires. — Déplacement électrique. — Courant électrique. — Courants d'induction. — Vitesse de propagation. — Nombre v de Maxwell. — Théorie électromagnétique de la lumière. — Dispersion dans le vide. — Interférences.

N° 10. — Les Rayons cathodiques, par P. Villard, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Appareils.** — Appareils à raréfier les gaz. — Préparation de l'oxygène pur. — Préparation de l'hydrogène pur et sec. — Sources d'électricité.

Chap. II. **Phénomènes électriques dans les gaz raréfiés.** — Lumière positive. — Gaine négative. — Espace obscur de Hittorf. — Résistance électrique des tubes à décharges. — Discontinuité de la décharge.

Chap. III. **L'émission cathodique.** — Découverte des rayons cathodiques. — Le faisceau cathodique.

Chap. IV. **Propriétés des rayons cathodiques.** — Phénomène de phosphorescence. — Effets mécaniques. — Effets caloriques. — Émission des rayons Rœntgen. — Propagation rectiligne des rayons cathodiques. — Expérience de la croix.

Chap. V. **Électrisation des rayons cathodiques.** — Expériences diverses. — Expériences de M. J. Perrin.

Chap. VI. **Électrisation des tubes à décharges.** — Chute de potentiel à la cathode. — Capacité des tubes à décharges.

Chap. VII. **Actions électrostatiques.** — Action d'un champ électrique sur les rayons cathodiques. — Calcul de la déviation. — Mesure de la chute de potentiel à la cathode. — Absence d'action réciproque entre deux rayons cathodiques.

Chap. VIII. **Action d'un champ magnétique sur les rayons cathodiques.** — Déviation magnétique. — Calcul de la déviation. — Relation entre la déviation et le potentiel de décharge. — Constance du rapport $\frac{e}{m}$. — Conséquence des lois de l'action magnétique. — Concentration des rayons cathodiques dans un champ magnétique. — Rayons parallèles au champ.

Chap. IX. **Vitesse des rayons cathodiques.** — Méthodes indirectes de J.-J. Thomson. — Valeur de $\frac{e}{m}$ et de V. — Expériences de M. E. Wiechert.

Chap. X. **Hétérogénéité des rayons cathodiques.** — Expérience de M. Birkeland. — Dispersion électrostatique. — Expérience de M. Deslandres. — Cause de la dispersion magnétique ou électrique.

Chap. XI. **Actions chimiques des rayons cathodiques.** — Colorations produites par les rayons. — Photo-activité des sels colorés par les rayons. — Phénomènes de réduction. — Production d'ozone.

Chap. XII. **Phénomènes divers.** — Cas particulier d'émission cathodique. — Passage des rayons au travers des lames minces. — Diffusion des rayons cathodiques. — Réflexion et réfraction apparentes. — Évaporation électrique. — Phénomènes d'oscillation dans le tube à décharge. — Kanalstrahlen ou rayons de Goldstein. — Surfaces interférentielles de Jaumann. — Rayons cathodiques non déviables.

Chap. XIII. **Expérience de M. Lénard.** — Rayons cathodiques dans l'air à la pression ordinaire. — Rayons cathodiques dans les gaz à diverses pressions.

Chap. XIV. **La formation des rayons cathodiques.** — Rôle de l'électrisation des parois. — Afflux cathodique. — Émission. — Propagation.

Chap. XV. **Nature de la matière radiante.** — Union de la matière radiante. — Rayons cathodiques. — Rayons cathodiques diffusés. — Afflux cathodique. — Rayons de Goldstein. — Hydrogène cathodique.

Chap. XVI. **Les corps radio-actifs et les rayons cathodiques naturels.** — Rayons uraniques. — Radio-activité induite. — Rayons déviables du radium. — Électrisation des rayons du radium.

N° 11. — Production et Emploi des courants alternatifs, par L. Barbillion, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **Rappel des quelques notions théoriques relatives à l'induction électromagnétique et aux machines à courant continu.** A. Phénomènes d'induction. — B. Machines dynamo-électriques à courant continu.

Chap. II. **Étude d'un courant alternatif.** — A. Caractéristique d'un courant alternatif. — B. Étude d'un circuit parcouru par un courant alternatif simple sinusoïdal. — C. Courant polyphasé et champs tournant.

Chap. III. **Classification des machines d'induction. — Expression du travail électromagnétique développé dans une machine d'induction.**

Chap. IV. **Machines génératrices à courants alternatifs.**

Chap. V. **Moteurs à courants alternatifs.** — Moteurs asynchrones. — Moteurs asynchrones polyphasés. — Moteurs asynchrones monophasés. — Comparaison des moteurs synchrones et asynchrones. — Moteurs monophasés. — Moteurs polyphasés.

Chap. VI. **Transformation du courant.** — A. Transformateurs statiques. — B. Convertisseurs rotatifs. — C. Commutatrices.

N° 12. — La Série de Taylor et son prolongement analytique, par Jacques Hadamard.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Propriétés fondamentales des fonctions analytiques.**

Chap. II. **Nature et difficulté du problème.**

Chap. III. **Méthodes directes.**

Chap. IV. **Les séries qui admettent le cercle de convergence comme ligne singulière.**

Chap. V. **Recherches des singularités de nature déterminée.**

Chap. VI. **Méthodes d'extension. — Les séries de polynômes et le théorème de M. Mittag-Leffler.**

Chap. VII. **Méthodes de transformation.**

Chap. VIII. **Application des principes généraux du calcul fonctionnel.**

Chap. IX. **Généralisations diverses.**

Chap. X. **Applications.**

Conclusions. — **Bibliographie.**

N° 13. — **Cryoscopie,** par F.-M. Raoult, membre correspondant de l'Institut, doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE. — **Principes généraux.** — Symboles et définitions. — Historique. — Phénomènes qui accompagnent la congélation. — Surfusion. — Généralités sur la température de congélation des mélanges liquides. — Nature de la glace formée dans les dissolutions. — Solutions solides. — Température de congélation des dissolutions. — Causes d'erreur. — Corrections. — Influence de la température de l'enceinte. — Influence de l'étui de glace, de l'agitation, de l'air dissous.

DEUXIÈME PARTIE. — **Méthode d'observation.** — Cryoscopes usuels de Raoult, Paterno et Nasini, Amvers, Beckmann, Eykmann. — Cryoscopes de précision de Roloff, Jones, Wildermann, Obegg, Laomis. — Cryoscope de précision de Raoult. — Dispositif pour les températures élevées.

TROISIÈME PARTIE. — **Cryoscopie des non-électrolytes** (Substances organiques). — Influence de la concentration. — Influence de la nature des corps dissous. — Loi de Raoult. Sa généralité. Anomalies. — Influence de la nature des dissolvants ; loi de Raoult-Van't-Hoff. — Détermination des poids moléculaires. — Cryoscopie des composés minéraux non-électrolytes. — Constitution des corps moléculaires dissous (métaux, métalloïdes, composés organiques).

QUATRIÈME PARTIE. — **Cryoscopie des électrolytes** (Composés salins). — Influence de la concentration. — Poids moléculaire des sels dans d'autres dissolvants que l'eau.

N° 14. — **Franges d'interférence et leurs applications métrologiques,** par J Macé de Lépinay, professeur à la Faculté des sciences de Marseille.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE. — Chapitre premier. **Production des franges d'interférence.**

Chap. II. **Appareils interférentiels.**

Chap. III **Sur l'emploi des sources lumineuses étendues.**

Chap. IV. **Apparitions et disparitions périodiques des franges d'interférence.**

Chap. V. **Sources.**

DEUXIÈME PARTIE. — Chapitre premier. **Généralités.**

Chap. II. **Détermination d'un ordre d'interférence (Partie fractionnaire).**

Chap. III. **Détermination d'un ordre d'interférence (Partie entière).**

Chap. IV. **Comparaison de longueurs.**

Chap. V **Correction progressive des données primitives. Applications.**

TROISIÈME PARTIE. — CHAPITRE PREMIER. **Préliminaires.**
CHAP. II. **Comparaison de longueurs d'onde à l'étalon prototype du mètre.**
CHAP. III. **Mesures optiques de longueurs.**
CHAP. IV. **Application à la détermination de la masse du décimètre cube d'eau distillée, privée d'air à 4°.**

N° 15. — La Géométrie non euclidienne, par P. BARRARIN.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Considérations générales et historiques.** — 1. Euclide. — 2. Premières idées touchant la géométrie non euclidienne. — 3. Les fondateurs de la géométrie non euclidienne. Lobatschewsky, Bolyai, Rieman. Leurs continuateurs.

CHAP. II. **Les définitions et postulats d'après Euclide. Les trois géométries.** 4. Les définitions. — 5. Les postulats. — 6. Les définitions de la droite et du plan. — 7. Programme des principales propositions élémentaires de la géométrie générale. — 8. Les hypothèses de Saccheri. — 9. Région normale. — 10. Extension de la région normale. — 11. Hypothèse de l'angle droit, géométrie euclidienne. — 12. Hypothèse de l'angle aigu, géométrie lobatschewskienne. — 13. Hypothèse de l'angle obtus, géométrie riemannienne. — 14. Étude inverse.

CHAP. III. **La distance comme notion fondamentale.** — 15. Les travaux de M. de Tilly. — 16. La droite et le plan d'après Cauchy.

CHAP. IV. **La géométrie générale dans le plan et dans l'espace.** — 17. La géométrie générale dans le plan. — 18. La géométrie générale dans l'espace. — 19. Théorie des droites et plans qui ont une normale commune. — 20. Théorie des droites et plans parallèles.

CHAP. V. **La trigonométrie.** — 21. Formules des triangles. — 22. Formules des quadrilatères, constructions fondamentales.

CHAP. VI. **Mesures des aires et volumes.** — 23. Aires planes, triangle et polygone. — 24. Aires des surfaces courbes. — 25. Volumes.

CHAP. VII. **Les contradicteurs de la géométrie non euclidienne.** — 26. Objections principales. — 27. Objection des sphères et pseudo-sphères. — 28. Objection du triangle équilatéral. — 29. Autres objections.

CHAP. VIII. **La géométrie physique.** — 30. La forme géométrique de notre univers. — 31. Mesures relatives au paramètre. — Note I. — Sur le théorème de M. Cl. Vidal. — Note II. — Sur deux quadrilatères birectangles et isocèles de la région normale.

N° 16. — Le Phénomène de Kerr, par E. NÉCULCÉA.

TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE. — PRÉFACE. — INTRODUCTION.

PREMIÈRE PARTIE. — *Expériences.* — CHAPITRE PREMIER. — **Diélectriques solides.** — Premières expériences de J. Kerr. — Expériences de H. Brongersma. — Conclusion.

CHAP. II. **Diélectriques liquides.** — Expériences de J Kerr. — Corps électro-optiquement positifs. — Corps électro-optiquement négatifs. — Résultats

qualitatifs. — Expériences de Rœntgen. — Expériences de Brongersma. — Résultats quantitatifs. — Phénomène de Kerr dans un champ électrique uniforme. — Projection du phénomène. — Mesures absolues de la constance de Kerr.

CHAP. III. **Disparition instantanée du phénomène de Kerr.** — Méthode de M. R. Blondlot. — Expériences de MM. Abraham et J. Lemoine.

DEUXIÈME PARTIE. — *Théorie.* — CHAPITRE PREMIER. — **Essais théoriques de M. F. Pockels.**

CHAP. II. **Théorie de M. W. Voigt.** — Généralités. — Introduction du champ électrique extérieur. — Corps transparents. — Cas d'une bande d'absorption. — Conclusions. — Corps actifs. — Analogue du phénomène de Zeeman. — Corps isotropes; phénomènes de Kerr. — Généralisation de théorie. — Conclusion.

TROISIÈME PARTIE. — *Phénomène électro-optique analogue au phénomène de Zeeman.*

N° 17. — **Théorie de la lune,** par H. ANDOYER, professeur adjoint à la Faculté des sciences de l'Université de Paris.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. **Mise en équations et réduction du problème.**

CHAP. II. **Étude des équations de la théorie solaire du mouvement de la lune. — Forme de la solution.**

CHAP. III. **Calcul effectif des principales inégalités solaires du mouvement de la lune.**

CHAP. IV. **Formation des équations qui déterminent les inégalités secondaires du mouvement de la lune.**

CHAP. V. **Détermination de quelques inégalités secondaires périodiques du mouvement de la lune.**

CHAP. VI. **Influence des inégalités séculaires du soleil sur le mouvement de la lune.**

N° 18. — **Géométrographie** ou art des constructions géométriques, par E. LEMOINE.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS.

PREMIÈRE PARTIE. — **But de la géométrographie. — Construction des problèmes classiques.**

DEUXIÈME PARTIE. — **Problèmes relatifs aux pôles et polaires, aux axes et aux centres radicaux, à la moyenne géométrique entre deux droites. — Le rapport anharmonique : l'involution. — Symboles du « Streckenübertrager » de M. Hilbert.**

APPENDICE.

N° 19. — L'Électricité déduite de l'expérience et ramenée aux principes des travaux virtuels, par M.-E. Carvallo, docteur ès sciences, agrégé de l'Université, examinateur de mécanique à l'École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

Préface.

PREMIÈRE PARTIE. — **Les courants d'induction d'après Helmholz et Maxwell.** — 1. Introduction.

Chapitre premier. **Théorie de Helmholz.** — § 1er. *Fonction des forces électromagnétiques. Induction magnétique.* — 2. Introduction. — 3. Loi du flux de la force magnétique. — 4. Fonction des forces électromagnétiques. — 5. Induction magnétique. — 6. Conclusions. — § 2. *Equation de l'énergie. Force électromotrice induite. Selfinduction.* — 7. Introduction. — 8. Equation de l'énergie d'après Helmholz. — 9. Inertie propre d'un courant. Selfinduction. — 10. Force électromotrice induite. — 11. Force électromotrice de selfinduction. — 12. Conclusions. — § 3. *Courants en régime variable. Interprétations mécaniques.* — 13. Introduction. — 14. Equation du courant induit dans un circuit sans pile. — 15. Courants des piles en régime variable. — 16. Interprétations mécaniques. Principes de l'énergie et des travaux virtuels. — 17. Conclusions.

Chap. II. **Equation générale de la dynamique.** — § 1er. *Théorème des travaux virtuels.* — 18. Introduction. — 19. Théorème des travaux virtuels. Equation générale de la dynamique. — 20. Extension de l'idée de force, déduite de la notion d'énergie. Force électromotrice. — 21. Conclusions. — § 2. *Travail des forces d'inertie. Equations de Lagrange* — 22. Introduction. — 23. Expression de Lagrange pour le travail des forces d'inertie. — 24. Théorème des forces vives. — 25. Modification des formules de Lagrange quand les paramètres de mobilité ne sont pas des coordonnées proprement dites. — 26. Conclusions.

Chap. III. **Théorie de Maxwell.** — § 1er. *Les courants induits d'après Maxwell.* 27. Introduction. — 28. Théorie de Maxwell. — 29. Equations de Lagrange pour les circuits filiformes, mobiles et de forme invariable. — 30. Comparaison des équations de Lagrange avec l'expérience. — 31. Equations de Lagrange pour les circuits filiformes et déformables. — 32. Conclusions. — § 2. *Recherches de Maxwell sur l'énergie cinétique des courants mobiles.* — 33. Introduction. — 34. Forces d'inertie calculées par les équations de Lagrange. — 35. Force électromotrice. 36. Force pondéromotrice. — 37. Conclusion. — § 3. *Du rôle des aimants dans la théorie de Maxwell, d'après M. Sarrau.* — 38. Introduction. — 39. Hypothèse d'Ampère. — 40. Approche d'un circuit vers un aimant permanent. — 41. Paradoxe relatif à l'énergie. — 42. Force coercitive de l'aimant. — 43. Conclusions.

Conclusions de la première partie.
— 44. Les forces électromagnétiques et magnétiques sont des forces d'inertie comme les forces électromotrices d'induction.

DEUXIÈME PARTIE. **L'électricité ramenée au principe des travaux virtuels.** — 45. INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER. **Théorie de l'électricité dans les corps en repos.** — § 1er. *Extension des lois de Kirchhoff aux conducteurs à trois dimensions.* — 46. Introduction. — 47. Notions relatives aux courants. Intensité, flux, vitesse du courant. — 48. Extension de la première loi de Kirchhoff. — 49. Forces électromotrices dans les conducteurs à trois dimensions. — 50. Force électromotrice due à l'effet Joule. — 51. Force électromotrice due à l'effet Peltier. — 52. Extension de la deuxième loi de Kirchhoff. — 53. Conclusions. — § 2. *Extension des lois de Kirchhoff au régime variable et aux diélectriques.* — 54. Introduction. — 55. Charge d'un condensateur par le courant d'une pile. — 56. Extension de la première loi de Kirchhoff. — 57. Extension de la deuxième loi de Kirchhoff. — 58. Vérifications expérimentales. — 59. Champ électrostatique créé par les courants. — 60. Conclusions. — § 3. *Equations générales de l'électrodynamique dans les corps en repos.* — 61. Introduction. — 62. Interprétation dynamique des deux lois fondamentales. — 63. Equations indéfinies dans un milieu continu (I et II). — 64. Equations à la surface de séparation de deux milieux (III). — 65. Equivalence des deux lois fondamentales avec le système des équations I, II et III. — 66. Comparaison de notre théorie avec celle de Maxwell. — 67. Conclusions. — § 4. *Le problème de l'électrodynamique et l'électro-optique.* — 68. Introduction. — 69. Loi de Biot et Savart. — 70. Equations du courant de conduction et de la force électrique. — 71. Détermination du problème de l'électrodynamique. — 72. Rapprochement avec la lumière. Constitution des diélectriques. — 73. Conclusions. — § 5. *Energie électrique.* — 74. Introduction. — 75. Equation de l'énergie. — 76. Diverses espèces d'énergie électrique. — 77. Travail des forces appliquées. Puissance des générateurs ; énergie potentielle des diélectriques. — 78. Travail des forces d'inertie. Energie électrocinétique. — 79. Conclusions.

CHAP. II. **Théorie de l'électricité dans les corps en mouvement.** — § 1er. *La théorie de Maxwell et la roue de Barlow.* — 80. Introduction. — 81. Les équations de Lagrange mises en défaut par la roue de Barlow. — 82. Véritables équations de la roue de Barlow. — 83. Adaptation de la théorie de Maxwell à la roue de Barlow. — 84. Conclusions. — § 2. *Lois de l'inertie électrique.* — 85. Introduction. — 86. Examen critique des énoncés de Maxwell. Deux forces électromotrices d'induction. — 87. Trois lois de l'inertie électrique. — 88. Vérifications expérimentales. — 89. Conclusions. — § 3. *Electrodynamique des corps en mouvement.* — 90. Introduction. — 91. Les deux lois fondamentales étendues aux corps en mouvement. — 93. Equations de l'électrodynamique pour les corps en mouvement. — 93. Equation de l'énergie. — 94. Conclusions.

CONCLUSION GÉNÉRALE. — 95. Ma conclusion est l'idée même de ce livre.

N° 20. — Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie, par H. Laurent, examinateur à l'École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.
Égalité et addition. — Quantités. — Propriétés des quantités. — Les nombres. — Multiplication et division. — Les incommensurables. — Logarithmes. — Conclusion. — La pangéométrie. — Les espaces et leurs dimensions. — Déplacements euclidiens. — Distances. — Figures égales. — Ligne droite. — Angles. — Trigonométrie. — Perpendiculaire commune à plusieurs droites. — Contacts. — Longueurs. — Pangéométrie sphérique. — Trigonométrie sphérique. — Pangéométrie hyperbolique. — La géométrie euclidienne. — Résumé.

N° 21. — La Compressibilité des gaz réels, par L. Décombe, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

La loi de Mariotte. — Compressibilité des gaz aux pressions élevées. — Compressibilité des gaz aux faibles pressions. — Influence de la température sur la compressibilité des gaz. — Le point critique. — Fonction caractéristique. — Les états correspondants. — Compressibilité des mélanges gazeux.

N° 22. — Diagrammes et Surfaces thermodynamiques, par J.-W. Gibbs. Traduction de M. G. Roy, chef des travaux de physique à l'Université de Dijon, avec une introduction de M. B. Brunhes, professeur à l'Université de Clermont.

TABLE DES MATIÈRES

I. Méthodes graphiques dans le thermodynamique des fluides. — II. Méthode de représentation géométrique des propriétés thermodynamiques des corps par des surfaces.

Sous presse :

N° 23. — La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La Télégraphie sans fil, par H. Poincaré.

Série Biologique.

N° 1. — La Spécificité cellulaire, ses conséquences en biologie générale, par L. Bard, professeur à la Faculté de médecine de Lyon.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **L'indifférence et la spécificité cellulaire.** — Indifférence, spécificité, éclectisme. — Spécificité absolue. — Blastèmes. — Tissu germinatif commun. — Dualité des épithéliums et des substances conjonctives. — Retour à l'état embryonnaire. — Métaplasies. — Restrictions progressives de l'indifférence. — Théories idioblastiques; activité ou quantité inégales des idioblastes. — Prosoplastie et anaplastie. Eclectisme actuel.

Chap. II. **La fixité héréditaire des types cellulaires dans les organismes adultes.** — Similitudes des cellules naissantes. — Fixité absolue des types cellulaires dans les tumeurs. — Multiplicité indéfinie des espèces. — Rénovations physiologiques. — Substitutions d'espèces. — Transformations physiologiques évolutives. — Placentas extra-utérins. — Modifications morphologiques pathologiques. — Régénérations de tissus, d'organes. — Pseudarthroses. — Régénérations chez les animaux inférieurs. — Hétéromorphose. — Spécificité des cellules dans le règne végétal.

Chap. III. **La constitution des espèces cellulaires au cours du développement.** — Adaptation progressive aux conditions extérieures. — Détermination héréditaire. — Tumeurs à tissus multiples. — Dissociations graduelles des espèces. — Multiplications et dédoublements. — Cellules complexes et cellules simples. — Cellules totales initiales; cellules composites, intermédiaires et transitoires; cellules terminales. — Théorie de l'arbre histogénique, cellules nodales. — Cellules génératrices et cellules somatiques. — Théorie de de Vries, de Hausemann, de Nussbaum, de Weissmann. — Problème de l'isotropie de l'œuf; postgénération. — Théorie des trois feuillets de Remack, leur spécificité, leur généricité, leur détermination. — Nature somatique des cellules génératrices. — Constitution des espèces cellulaires chez les végétaux.

Chap. IV. **La spécificité cellulaire et les grands problèmes de la biologie générale.** — Théorie physique de la vie, force spéciale. — Équivalence chimique des cellules naissantes. — Rôle des substances dérivées, extra et intra-cellulaires, dans la vie collective des métazoaires. — Modalités multiples de la vie cellulaire, complémentaires, créées par des décompositions de forces. — Vie blanche et vies colorées. — Polarisation symétrique des cellules sexuelles. — Polyzoïsme. — Induction vitale. — Régulation des proliférations. — Pathogénie des tumeurs. — Influence réciproque à distance des cellules somatiques et des cellules génératrices. — Hérédité des propriétés acquises. — Mécanisme d'action des milieux sur l'hérédité. — Influence du fœtus sur sa mère. — Imprégnation, télégonie. — Constitution des espèces vivantes par dissociation. — Harmonie de l'ensemble des êtres vivants.

Index bibliographique des publications de l'auteur ayant trait à la spécificité cellulaire.

N° 2. — **La Sexualité,** par Félix Le Dantec, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **Phénomènes essentiels de la reproduction.** — Assimilation. — Génération agame. — Hérédité.

Chap. II. **Notion de la sexualité.** — Plastides incomplets par mérotomie ou division hétérogène. — Plastides incapables par sénescence. — Deux manières d'envisager la sexualité. — Apparition du dimorphisme dans les éléments reproducteurs. — Plastides équilibrés et déséquilibrés.

Chap. III. **Formation des produits sexuels chez les animaux supérieurs.**

Chap. IV. **Les caractères sexuels secondaires. — Sexe somatique. — Sélection sexuelle.** — Sélection sexuelle. — Aspect général du dimorphisme sexuel. — Résultats de la castration. — Hermaphrodites.

Chap. V. **La Fécondation.** — Hybrides.

Chap. VI. **La parthénogenèse.** — Parthénogenèse artificielle, occasionnelle, partielle, saisonnière, juvénile, totale.

Chap. VII. **Le sexe du produit dans la reproduction sexuelle et la parthénogenèse.**

Chap. VIII. **Époque de la détermination du sexe.** — Expériences sur les têtards. — Expériences sur les papillons. — Expériences sur les plantes. — Observations sur les mammifères et l'homme. — Détermination du sexe dans l'œuf fécondé. — Détermination du sexe par les conditions du développement embryonnaire.

Chap. IX. **Récapitulation.**

Chap. X. **Théorie du sexe.** — Attraction des éléments sexuels. — Fécondation. — Loi du plus petit coefficient. — Phénomènes consécutifs à la fécondation. — Hérédité à la première génération. — Métis. — Hybrides. — Formation des produits sexuels. — Senescences des Infusoires. — Produits de la 2e génération. — Métis. — Hybrides.

Conclusion.

N° 3. — **Les Fonctions rénales,** par H. Frenkel, professeur agrégé à la Faculté de médecine de Toulouse.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. — **Structure du rein.** — Tubes ou canalicules urinifères. Vaisseaux. Tissu conjectif. Nerfs. Histoire du développement.

Chap. II. **L'urine.** — Caractères physiques de l'urine. Concentration moléculaire des urines. Caractères chimiques de l'urine. Origine des éléments de l'urine. Variations de la composition de l'urine. Propriétés biologiques. Toxicité urinaire. Technique de la recherche de la toxicité urinaire. Importance de examen biologique des urines.

Chap. III. **Physiologie de la sécrétion rénale.** — Le rein considéré comme filtre. Théorie de Ludwig. Le rein considéré comme glande. Théorie de Bowmann-Heidenhain. Action des substances diurétiques sur la sécrétion rénale. Innervation rénale. Résorption intrarénale.

Chap. IV. **La sécrétion rénale interne.**

Chap. V. **Physiologie pathologique de la sécrétion rénale.** — Les oliguries et les anuries. Les polyuries. Les albuminuries. Rôle du rein dans la production de la glycosurie.

Chap. VI. **De la perméabilité et de l'insuffisance rénales.** — Perméabilité rénale. Méthodes d'examen de la perméabilité rénale. Perméabilité rénale au point de vue qualitatif. Insuffisance rénale. Causes de l'insuffisance rénale. Diagnostic de l'insuffisance rénale. Signes de l'insuffisance rénale.

Conclusions.

N° 4. — **Les Actions moléculaires dans l'organisme,** par H. Bordier, professeur agrégé à la Faculté de médecine de Lyon.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **Actions moléculaires dans les solides.** — Élasticité. Élasticité des corps inorganiques. Élasticité des corps organiques. Elasticité des muscles courbes. Élasticité des membranes. Phénomènes d'adhésion. Adhérence des surfaces articulaires.

Chap. II. **Actions moléculaires dans les liquides.** — Tension superficielle. Théorie du professeur Imbert relative à la contraction musculaire. Muscles lisses. Muscles striés. Phénomènes électriques résultant d'une variation de la tension superficielle.

Chap. III. **Actions moléculaires entre liquides différents.** — Osmose. Phénomènes électriques liés aux actions moléculaires de l'osmose.

Chap. IV. **Actions moléculaires entre solides et liquides.** — Phénomènes capillaires. Chapelets capillaires. Phénomènes d'imbibition. Filtration. Phénomènes de dissolution. Pression osmotique. Isotonie. Méthode de H. de Vries. Méthode de Hamburger. Méthode cryoscopique. Liquides de l'organisme. Sécrétion de l'urine. Pression osmotique des liquides de l'estomac. Rôle de la pression osmotique dans la résorption.

Chap. V. **Actions moléculaires entre solides et gaz.** — Phénomènes d'adhésion gazeuse. Atmosphères adhérentes dans l'organisme.

Chap. VI. **Actions moléculaires entre liquides et gaz.** — Dissolution des gaz.

Chap. VII. **Actions moléculaires dans les gaz.** — Diffusion des gaz. Osmose des gaz.

N° 5. — **La Coagulation du sang,** par Maurice Arthus, professeur de physiologie et de chimie physiologique à l'Université de Fribourg (Suisse).

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Nos connaissances sur la coagulation du sang vers 1890.**

Chap. II. **La présence de sels de chaux dissous dans le plasma est une condition nécessaire de la coagulation du sang.**

Chap. III. **Du rôle des sels solubles de chaux dans le phénomène de coagulation du sang.** — Travaux d'Arthus et Pagès, de Pekelharing, de Lilienfeld, d'Alex. Schmidt, d'Hammarsten.

Chap. IV. **Du fibrinferment, de sa nature, des conditions de sa production,** d'après Pekelharing.

Chap. V. **Des propriétés du sang non spontanément coagulable, obtenu par injection intravasculaire de protéoses, et de la cause de son incoagulabilité.**

Chap. VI. **Du mode et du lieu de formation, de la nature et des propriétés de la substance anticoagulante engendrée par l'organisme du chien sous l'influence des injections intraveineuses de protéoses.**

Chap. VII. **De l'immunité naturelle ou acquise contre les injections intraveineuses de protéoses.**

Chap. VIII. **Du pouvoir anticoagulant du sérum de sang d'anguilles, de certains extraits de tissus, de l'extrait de sangsues.**

Chap. IX. **Des substances qui peuvent provoquer des coagulations intravasculaires : nucléoalbumines, venin de serpent, colloïdes de synthèse.**

Bibliographie.

N° 6. — **Évolution du Carbone et de l'Azote dans le monde vivant,** par P. Mazé, ingénieur-agronome, docteur ès sciences, préparateur à l'Institut Pasteur.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **Origines du carbone organique.** — L'acide carbonique de l'air source du carbone des plantes. Élaboration des hydrates de carbone dans les feuilles. Les diastases des feuilles. Mécanisme de la formation des hydrates de carbone dans les feuilles. Assimilation du carbone organique du sol. Formation des matières grasses.

Chap. II. **Origines de l'azote organique.** — Nutrition azotée des plantes. Intervention de l'azote libre. Formation des composés quaternaires dans les végétaux supérieurs.

Chap. III. **Dégradation de la matière organique.** — Rôle des animaux. Rôle des infiniment petits.

N° 7. — L'Irritabilité dans la série animale,

par le Dr Denis Courtade, ancien interne des hôpitaux, ancien chef de laboratoire à la Faculté de médecine, lauréat de l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Historique.**

Chap. II. **Morphologie, structure, histologie et composition chimique de la matière vivante.**

Chap. III. **Conditions de l'irritabilité.** — I. Milieu chimique nécessaire au fonctionnement du protoplasma; *A*. Rôle de l'eau; *B*. Rôle de l'oxygène; *C*. Rôle des aliments. — II. Rôle de l'énergie; *A*. Influence de la chaleur; *B*. Influence des autres transformations de l'énergie.

Chap. IV. **L'irritabilité et ses manifestations.** — *A*. Irritabilité nutritive.

Chap. V. **L'irritabilité et ses manifestations** (*suite*). — *B*. Irritabilité fonctionnelle. 1. Phénomènes caloriques. 2. Phénomènes de mouvement. 3. Phénomènes électriques. 4. Phénomènes lumineux.

Chap. VI. **L'irritabilité et ses manifestations** (*suite*). — Phénomènes nerveux. I. Rôle du noyau dans la cellule. — II. Action du système nerveux dans l'organisme. *A*. A quelle période de l'évolution animale apparaît le système nerveux? *B*. Comment le système nerveux agit-il sur l'irritabilité? 1. Y a-t-il continuité du système nerveux avec l'organe ou simple contiguïté? 2. Quel est le lien qui relie l'influx nerveux à la vie cellulaire? 3. De quelle manière le système nerveux agit-il sur la fonction et quelles sont les lois qui règlent les manifestations des diverses irritabilités qui lui sont soumises? 4. Quel est le rôle du système nerveux?

Chap. VII. **Nature de l'irritabilité.**

N° 8. — La Spéléologie ou science des cavernes,

par E.-A. Martel.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Définition. Historique. Bibliographie. Programme.**

Chap. II. **Origine des cavernes.** — Influence prépondérante des fissures préexistantes du sol. Joints et diaclases. Leur utilisation par l'eau.

Chap. III. **Mode d'action des eaux souterraines.** — Érosion. Corrosion. Pression hydrostatique.

Chap. IV. **Circulation des eaux dans l'intérieur des terrains fissurés.** — Absorption par les crevasses, pertes et abîmes. Confusion de la nomenclature. Emmagasinement dans les réservoirs des cavernes et les rivières souterraines. Leur extension en hauteur et longueur. Absence des nappes d'eau. Issue des eaux par les sources.

Chap. V. **Les abîmes. Leur origine.** — Puits d'érosion. Orgues géologiques. Théorie geysérienne. Effondrements. Jalonnement. Dolines. Vallées inachevées. Désobstruction des fonds d'abîmes.

Chap. VI. **Les rivières souterraines. Leur pénétration.** — Aspects divers selon les fissures. Appauvrissement des eaux actuelles. Desséchement de l'écorce terrestre. Obstacles des rivières souterraines. Siphons. Pression hydrostatique. Tunnels naturels.

Chap. VII. **L'issue des rivières souterraines. Les sources. Les résurgences.** — Les sources siphonantes. Sources pérennes, intermittentes, temporaires. Les trop-pleins. Variations et crues des rivières souterraines. L'évaporation souterraine. Explosions de sources. Age du creusement des cavernes. Sable croulant. Éruptions de tourbières.

Chap. VIII. **Contamination des rivières souterraines.** — L'empoisonnement des résurgences par les abîmes. La source? de Sauve. Expériences à la fluorescéine.

Chap. IX. **La spéléologie glaciaire.** — Écoulements de l'eau sous les glaciers. Poches et débâcles intra-glaciaires. Exploration des moulins et crevasses. Grottes naturelles sous la glace.

Chap. X. **Météorologie souterraine.** — Pression atmosphérique. Irrégularité des températures des cavernes et des résurgences. Application à l'hygiène publique. Acide carbonique des cavernes. Gaz de décomposition organique.

Chap. XI. **Glacières naturelles.** — Influence prépondérante du froid de l'hiver sur leur formation. Trous à vent. Puits à neige.

Chap. XII. **Relations des cavités naturelles avec les filons métallifères.** — Substances minérales rencontrées dans les cavernes. Blue-John-Mine. Pseudomorphoses. Les phosphates.

Chap. XIII. **Les concrétions. Stalactites et stalagmites.** — Calcite, aragonite, ktypéite. Mondmche. Perles des cavernes. Stalagmites d'argile. Eaux perçantes. Influence des eaux courantes, temporaires, stagnantes. Les gours. Les tufs : leur formation et leurs dangers. Le remplissage des cavernes.

Chap. XIV. **Travaux pratiques.** — Désobstruction de pertes. Desséchement de marais. Recherches de réservoirs naturels. Désobstruction d'abîmes. Reboisement. Indications pour les travaux publics. Expériences scientifiques diverses. Recherches paléontologiques.

Chap. XV. **Préhistoire. Archéologie. Ethnographie.**

Chap. XVI. **Faune et Flore souterraines.** — Les animaux aveugles. Leur origine. Leur existence. Modification de leurs organes. Les chauves-souris. La flore des abîmes. Conclusions

N° 9. — L'Orientation, par le Dr Pierre Bonnier.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier. **Définition.**

Chap. II. **La notion d'espace.**

Chap. III. **Orientation subjective.** — Sens des attitudes segmentaires.

Chap. IV. **Orientation subjective.** — Sens de l'attitude totale.

Chap. V. **Rapports de l'orientation subjective avec la motricité.**

Chap. VI. **Rapports de l'orientation subjective avec la sensibilité.** — *Orientation objective.* Orientation tactile. Orientation visuelle. Orientation auditive. Orientation olfactive. Notions stéréognostiques.

Chap. VII. **Orientation lointaine.**

Chap. VIII. **Domaine psychique de l'orientation.**

N° 10. — L'Assimilation chlorophyllienne et la structure des plantes, par Ed. Griffon, ingénieur-agronome, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **L'énergie assimilatrice et sa nature.** — Nature de l'assimilation chlorophyllienne. — Définition de l'énergie assimilatrice. — Séparation de l'assimilation et de la respiration. — Comparaison entre les deux phénomènes. — Résultante : influence des conditions de milieu sur elle. — Cas où la respiration l'emporte. — Mesure de la résistante : méthode de la formation de l'amidon ; méthode des échanges gazeux et procédés expérimentaux.

Chap. II. **Plantes représentant leur structure normale.** — I. *Plantes ni parasites ni saprophytes.* — 1. Plantes appartenant à des variétés ou à des espèces voisines, mais dont les feuilles sont inégalement vertes. 2. Ombellifères.— 3. Plantes grasses.— 4. Plantes rouges. — 5. Plantes panachées. — 6. Plantes d'âges différents. — 7. Organes différents. — II. *Plantes parasites et saprophytes.* — Rhinanthacées et Loranthacées. Orchidées. Appendice sur l'assimilation chez les Algues : Algues brunes, rouges et bleues ; Bactéries pourprées ; Bactéries de la nitrification.

Chap. III. **Plantes dont la structure a été modifiée par le milieu.** — I. *Action de la lumière.* — 1. Plantes ayant verdi à l'obscurité. — 2. Plantes développées à l'ombre et au soleil. — 3. Plantes développées à la lumière continue et à la lumière discontinue ; plantes artiques. — Plantes ayant crû dans des lumières inégalement réfrangibles. — II. *Action de la chaleur.* — 1. Plantes de plaine et de montagne. — 2. Plantes développées à des températures différentes. — 3. Plantes rendues artificiellement alpines par alternance des températures extrêmes. — III. *Action de l'état hygrométrique.* — 1. Plantes développées dans un milieu sec et dans un milieu humide ; plantes arctiques et plantes alpines. — IV. *Action des sels minéraux.* — 1. Nitrates. — 2. Sels de fer. — 3. Sels de cuivre. — 4. Sel marin ; plantes du littoral. — 5. Calcaire ; plantes chlorotiques.

Chap. IV. **Structure et assimilation.** — Observations générales sur les expériences précédentes. — Hypothèses diverses sur la signification des tissus palissadiques. — Développement des feuilles dans une atmosphère riche en acide carbonique. — L'assimilation sur les deux faces d'une feuille ; interprétation des résultats. — L'assimilation dans la lumière solaire qui a traversé des tissus de végétaux. — Influence de la structure de l'épiderme ; épaisseur de la cuticule ; nombre des stomates ; poils. — Quantité de chlorophylle. — Pluralité des chlorophylles. Spécificité du substratum vivant des chloroleucites. — Anatomie physiologique et physiologie expérimentale.

Conclusions.

N° 11. — **L'Évolution du Pigment,** par le Dr G. Bohn, agrégé des Sciences naturelles, préparateur à la Sorbonne.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction. — I. La vie des ancêtres de la cellule. — II. La vie des bactéries, des chloroleucites et des granules pigmentaires. — III. La vie des cellules ou plastides. — IV. Évolution de la vie plastidulaire à la vie plastidaire. — V. La vie des êtres plastidaires. — Métamorphoses et production du pigment.

Chapitre premier. — **De la constitution des pigments en tant que substances chimiques produites par les granules pigmentaires.** — I. Pigments hydrocarbonés (lipochromes) et leurs dérivés. — II. Pigments azotés dérivés de la chromatine. — Pigments uriques des lépidoptères et des poissons. Hémoglobine et ses dérivés. Chlorophylle et ses dérivés. Mélanines. — III. Pigments azotés de la série aromatique.

Chap. II. — **Des granules pigmentaires en tant que producteurs des pigments.** — I. Formes des granules pigmentaires. — II. Dimensions. — III. Teinte. — IV. Nature des granules et leur composition chimique d'après Carnot. — V. Mouvements des granules pigmentaires. — VI. Réactions dues à des agents chimiques. — VII. Réactions dues à des agents physiques.

Chap. III. — **Étude biologique des bactéries chromogènes.** — Intérêt de l'étude des bactéries pour celle des granules pigmentaires. — Aperçu sur les bactéries chromogènes. — Influence de la chaleur sur les bactéries chromogènes. — Influence de la lumière. — Expériences sur les Beggiatoa et les bactéries pourprées. — Expériences sur le bacille de Kiel. — Expériences sur le bacille du pus bleu. — Influence des substances chimiques sur les bactéries chromogènes. — Action de l'oxygène. Action des alcalis. Action des acides. Action des sels. Action de l'alcool, de la glycérine, des sucres. — Conclusions.

Chap. IV. **Étude biologique des chloroleucites.**

Chap. V. **Étude biologique des granules pigmentaires des animaux.** — Haut intérêt de cette étude et manière de la comprendre.

Chap. VI. **Apparition des granules pigmentaires dans les organismes animaux.** — I. Apparition du pigment dans les cellules reproductrices. II. Apparition du pigment dans les tissus d'un animal en voie de métamorphose. — III. Apparition du pigment dans les cellules nerveuses sénescentes. — Conséquences. — Résumé.

Chap. VII. **Migrations, infections et contagions pigmentaires.** — I. Extension progressive du pigment. — II. Transport du pigment dans les organismes. — III. Facteurs qui influent sur les migrations pigmentaires. — IV. Infections et contagions pigmentaires.

Chap. VIII. **Modifications du pigment dans les organismes, Virages, atténuations et exaltations pigmentaires.** — Influence des agents chimiques. — Influence de l'oxygène et des réducteurs. Influence des acides. Influence des bases organiques. — Influence des agents physiques.

Chap. IX. **Évolution du pigment dans les divers groupes du règne animal.** — I. Etres monoplastidaires et gastréades. — Protozoaires. Spongiaires. Cœlentérés. — II. Néphridiés. — Vers. Vertébrés. Tuniciers. — III. Arthropodes. — Crustacés. Insectes. — Conclusions.

Chap. X. **Harmonies pigmentaires.** — Animaux des grandes profondeurs et animaux de la haute mer. — Animaux marins fouisseurs et animaux terrestres cavernicoles. — Animaux des îles et animaux des déserts. — Faune et flore des zones de la mer. — Mimétisme et sélection naturelle. — Défense des organismes par la production du pigment. — Défense de l'acide carbonique. Défense contre les poisons. Défense contre l'oxygène. Défense contre la lumière. — Théorie nouvelle de l'adaptation chromatique. Lutte vitale entre les granules pigmentaires.

Conclusions.

N° 12. — **L'Hérédité acquise,** ses conséquences horticoles, agricoles et médicales, par M.-J. Costantin.

TABLE DES MATIÈRES

Préface.

Chapitre premier. **État actuel de la question.**

Chap. II. **Théorie du plasma germinatif.**

Chap. III. **Hérédité dans la reproduction asexuée** (Variétés horticoles et agricoles. Hybrides de greffe).

Chap. IV. **Transformisme expérimental et agronomie.**

Chap. V. **Origine et progrès de la sélection artificielle** (l'art de l'élevage).

Chap. VI. **Quelques objections à l'action du milieu.** — I. Les espèces jordaniennes habitent les mêmes lieux. — II. Les variations ne se produisent pas à la première génération. — III. Les effets attribués aux agents extérieurs sont le résultat d'une lente sélection. — IV. Induction physiologique. — V. Conclusions.

Chap. VII. — **Maladies.** — I. Hérédité morbide. — II. Hérédité vaccinale.

Chap. VIII. — **Sélection germicale.**

N° 13. — Les Phénomènes électriques chez les êtres vivants, par Maurice Mendelssohn.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chap. I. **Historique.** — Expériences de Galvani. Critique de Volta. Recherches de Matteucci et de du Bois-Reymond.

Chap. II. **Phénomènes électriques des muscles et des nerfs.** — Courant des muscles et des nerfs au repos. Loi du courant musculaire et nerveux. Courants des muscles et des nerfs en action. Variation négative du courant de repos. Courants d'action. Courants électrotoniques et secondaires des muscles et des nerfs.

Chap. III. **Phénomènes électriques chez l'homme.** — Variation négative qui accompagne la contraction volontaire d'un muscle intact. Courants d'action diphasiques. Courants du muscle cardiaque recueillis à travers la peau. Tension électrique de la surface du corps humain.

Chap. IV. **Phénomènes électriques de la peau et des glandes.** — Courants cutanés et glandulaires.

Chap. V. **Phénomènes électriques des centres nerveux et des organes des sens.** — Courants cérébro-spinaux. Courants rétiniens.

Chap. VI. **Poissons électriques.** — Structure de l'organe électrique. Nature et caractères de la décharge électrique des poissons. Immunité du poisson électrique vis-à-vis de sa propre décharge. La décharge envisagée comme un tétanos électrique. Courant de repos dit courant de l'organe.

Chap. VII. **Phénomènes électriques chez les végétaux.** — Courant normal de la feuille et courants d'action de la Dionea muscipula. Courants trophiques, traumatiques et courants d'excitation des plantes.

Chap. VIII. **Théorie d'électrogenèse chez les êtres vivants.** — Théorie moléculaire de du Bois-Reymond. Théorie d'altération d'Hermann. Théorie électro-capillaire de d'Arsonval. Théorie électrolytique.

Chap. IX. **Considérations générales. Rôle des phénomènes électriques dans les manifestations de la vie.** — Electricité organique et la propagation de l'excitation le long de la fibre nerveuse. Transmission de l'excitation du nerf au muscle. Hypothèse de la décharge.

N° 14. — **Mode de fonctionnement économique de l'organisme,** par le docteur A. Imbert, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, membre correspondant de l'Académie de médecine.

TABLE DES MATIÈRES

Considérations générales. — Causes diverses qui influent sur la dépense d'énergie du moteur animé et qui dépendent de la volonté. Raccourcissement musculaire. Antagonisme des muscles. Positions relatives des leviers osseux. Forme des muscles et mode d'excitation.

Actes mécaniques généraux. — Procédé d'appréciation propre à l'organisme. Conditions d'observation. L'adulte et l'enfant ; le sujet en état de santé et le malade. Les pêcheuses d'Haughton. Les travaux de Marey sur la locomotion. L'apprentissage des sports.

Les muscles antagonistes. — Opinions de Winslow, de Duchenne (de Boulogne), de Pettigrew. Travaux de Beaunis, de Demeny, de P. Richer. Indications fournies par la considération des muscles droits internes et externes du globe oculaire. Recherches de Sherrington et de Topolanski. Faits cliniques correspondants. Loi générale du fonctionnement des muscles antagonistes.

Adaptation des muscles à un fonctionnement économique. — Travaux de Haughton. Insuffisance des considérations tirées de la mécanique des corps inertes. Recherches de J. Guérin, de W. Roux, de Marey sur l'adaptation fonctionnelle des muscles. Travaux de Weiss. Caractères physiologiques de la question. Topographie de l'innervation musculaire ; inégalité de l'excitation des diverses fibres d'un même muscle.

L'énergétique animale d'après l'œuvre de Chauveau. — L'énergie physiologique et ses variations avec le raccourcissement et avec la charge. Les travaux connexes. Le travail d'excitation neuromusculaire. La multiplicité des causes de dépense d'énergie par le moteur animé. Étude de quelques actes mécaniques en tenant compte de ces diverses dépenses. La contraction balistique de P. Richer ; les mouvements du globe oculaire. Soutien d'un poids suspendu à la main et soutien du poids du corps à la barre du trapèze.

Conclusions.

N°s 15-16. — **Le Leucocyte et ses granulations,** par le Dr C. Levaditi, chef du Laboratoire de bactériologie et d'anatomie pathologique de l'hôpital Brancovano (Bucharest), lauréat de l'Institut (Académie des

Sciences). Avec une préface par le professeur Paul Ehrlich, directeur de l'Institut de thérapeutique expérimentale de Francfort-sur-le-Mein.

TABLE DES MATIÈRES

Préface.

Chapitre premier. **Généralités.**

Chap. II. **Méthode analytique.** — *a*) Valeur de la méthode analytique. — *b*) Oxyphilie, basophilie, neutrophilie.

Chap. III. **La morphologie et les réactions colorantes des granulations leucocytaires.** — I. Granulations éosinophiles (α). — II. Granulations neutrophiles (ε). — III. Granulations basophiles métachromatiques (γ).

Chap. IV. **Les espèces leucocytaires du sang et des organes hématopoïétiques. Globules blancs jeunes (myélocytes) et adultes. Relations entre les diverses catégories de leucocytes.** — I. Les diverses espèces de globules blancs. — II. Leucocyte granulé jeune (myélocyte) ; leucocyte granulé adulte (à noyau polymorphe). — III. Relations entre les diverses catégories de leucocytes.

Chap. V. **Cytogenèse des globules blancs granulés.** — I. *La moelle osseuse.* — *a*) Considérations d'ordre histologique. — *b*) Considérations d'ordre physiologique. — *c*) Considérations d'ordre anatomo-clinique. — II. *La rate comme générateur de globules blancs granulés.* — *a*) Considérations d'ordre histologique. — *b*) Considérations d'ordre physiologique.

Chap. VI. **Variations numériques des leucocytes granulés du sang. Leucocytose.** — I. La leucocytose, — 1. La théorie de Virchow. — 2. La théorie de Schur et Lowy. — 3. La théorie d Schultz. — 4. La théorie de Buchner et Roemer. — 5. La théorie chimiotaxique. — II. Taux leucocytaire du sang normal.

Chap. VII. **Éosinophilie hématique.** — 1. Éosinophilie taxique. — 2. Éosinophilie réactionnelle. — 3. Éosinophilie dans l'asthme. — 4. Éosinophilie dans les maladies cutanées. — 5. Éosinophilie dans les affections parasitaires.

Chap. VIII. **Éosinophilie locale.** — 1. Éosinophiles dans les crachats. — 2. Éosinophiles dans les affections cutanées. — Théorie de la formation locale des cellules éosinophiles.

Chap. IX. **Considérations générales sur les autres cellules granulées (neutrophiles, Mastzellen). La Mastzellen-leucocytose.** — La Mastzellen-leucocytose.

Chap. X. **Importance des granulations leucocytaires. Leur caractère spécifique.**

N° 17. — Les Phénomènes des Métamorphoses internes, par J. Anglas, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

I. **Transformation et métamorphose.** — II. **L'histolyse et l'histogenèse.** — III. **État actuel de la question.** — IV. **Mécanisme et déterminisme de la métamorphose.**

Chapitre premier. **Histogenèse précédée d'une histolyse peu considérable.** — I. *Téguments.* Histoblastes, replis et disques imaginaux. Histogenèse des appendices et de l'hypoderme. Modification de l'hypoderme larvaire. Éléments dérivés de l'hypoderme. Rôle des leucocytes. — II. *Système trachéen.* Cas ne comportant pas d'histolyse. — III. *Œsophage et intestin postérieur.* — IV. *Tube excréteur ou de Malpighi.* — V. *Système nerveux.* — VI. *Organes génitaux.* La conservation de l'individu et celle de l'espèce. Modification de l'ovaire de *Culex pipiens.* Histolyse des cellules nourricières. Rôle des leucocytes. La métamorphose et l'évolution génitale.

Chap. II. **Les processus de l'histolyse.** — I. *Généralités sur les tissus conjonctifs.* Conjonctif de la larve. Conjonctif de la nymphe. Sarcocytes ; Körnchenkugel. Conjonctif de l'adulte. — II. *Évolution de la cellule adipeuse d'un Diptère.* Larve jeune ; réserves adipeuses. Larve mûre ; granules albuminoïdes. Nymphe. Origine des réserves albuminoïdes. Adulte. — III. *Évolution du tissu adipeux chez les Insectes en général.* — IV. *Quelques théories de l'histolyse du corps adipeux.* — V. *Cellules excrétrices et œnocytes.* — VI. *Leucocytes.* — VII. *Le tissu musculaire en général.* Muscles larvaires. Marche de l'histolyse dans les muscles. — VIII. *Histolyse totale de muscles.* Dégénérescence du noyau. Sarcocytes. Caryolytes. Sarcolytes. Histolyse des fibres. Rôle des leucocytes. — IX. *Histolyse partielle de muscles.* Destruction de fibres. Transformation de fibres larvaires. — X. *Histolyse des muscles avec remaniement considérable.* — XI. *Histolyse musculaire chez les Diptères.* — XII. *Historique critique du problème de la myolyse.* Théories absolues : A) *Théorie phagocytaire.* Théories absolues : B) *Régression chimique.* — Théories mixtes : A) *Autophagocytose.* Théories mixtes : B) *Lyocytose.* — XIII. *Histolyse des tubes de Malpighi et des glandes séricigènes.* Rôle des leucocytes. — XIV. *Histolyse de l'intestin moyen.* Épithélium larvaire. Cellules de remplacement ; îlots de remplacement. Leur origine. Histolyse de l'épithélium larvaire.

Chap. III. **Les caractères de l'histolyse.** — I. La dégénérescence initiale. — II. Y a-t-il autophagocytose ? — III. Éliminations nucléaires et protoplasmiques. — IV. Agglomérations leucocytaires. — V. Englobement et transport de débris tissulaires par les leucocytes. — VI. La phagocytose.

Chap. IV. **Les processus de l'histogenèse.** — I. *Tissu adipeux imaginal.* Évolution des noyaux musculaires larvaires. — II. *Tissu musculaire imaginal.* Origine des noyaux imaginaux. Muscles longitudinaux de

l'abdomen. Muscles du thorax. Muscles péri-intestinaux. — III. *Histogenèse de l'intestin moyen.* — IV. *Origine des éléments imaginaux en général.* Muscles. Conjonctif. Intestin.

Chap. V. **Le déterminisme de la métamorphose.** — I. *La théorie phagocytaire.* Les métamorphoses et les processus inflammatoires. — II. *Théorie de la crise génitale.* Objections. — III. *Théorie asphyxique.* Accumulation de CO^2 dans le milieu intérieur. Aucuns troubles de la nutrition (transpiration, glycogénie, troubles circulatoires). Relation entre l'asphyxie et la métamorphose. Phénomènes de pigmentation. — IV. *Théorie de l'arrêt physiologique.* Nécrobiose phylogénique et nécrobiose pathologique. Application à la loi de Geoffroy Saint-Hilaire. — V. *Éthologie des métamorphoses.* Passage de la vie pélagique libre à la vie sédentaire. Passage de la vie libre à la vie parasite. Passage de la vie aquatique à la vie aérienne. Changement de régime alimentaire; cas des Insectes. Hypermétamorphoses. — VI. *Les métamorphoses et la loi de Fr. Müller.* — VII. *Préformation et épigenèse.* — VIII. *Y a-t-il substitution d'organismes?* — IX. *Générations alternantes et métamorphoses.* Étendue et limites du terme métamorphose.

Conclusions.

N° 18. — **Purine et ses dérivés,** par le Dr A. Mouneyrat, docteur ès sciences, ancien préparateur en chef au laboratoire de chimie biologique de la Faculté de médecine de Paris.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Historique des bases xanthiques. — Méthodes de synthèse de l'acide urique. — Constitution et nomenclature de la purine et de ses dérivés. — Méthodes de synthèse dans la série purique. — Acide urique et ses dérivés monométhylés. — Acides diméthyluriques. — Acides triméthyluriques. — 2-6-dioxypurine. — Xanthine et ses dérivés méthylés. — Théobromine. — Théophylline. — Caféine. — 6-8-dioxypurine et ses dérivés méthylés. — Monoxypurine-Hypoxanthine et ses dérivés méthylés. — Monoaminopurine-Adénine. — Autres dérivés méthylés. — Aminooxypurines-Guanidine et dérivés méthylés. — Aminodioxypurine et ses dérivés méthylés. — Thiopurine et ses dérivés. — Oxychloropurines. — Purine. — Influence de la structure des dérivés puriques sur leurs propriétés physiques et chimiques. — Origine et lieu de formation des bases puriques dans l'organisme animal. — Variations physiologiques et pathologiques des bases puriques. — Dosage des bases puriques. — Conclusions et mécanisme de formation des bases puriques dans l'organisme animal.

Paris. — Imp. E. Capiomont et Cie, rue de Seine, 57.

QA
691
G85

Guichard, Claude
Sur les systémes

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

STACK COPY
FOR USE IN LIBRARY ONLY